

А. М. Попов, В. Н. Сотников

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

Рекомендовано Учебно–методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

**Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru**

Москва ■ Юрайт ■ 2019

УДК 51(075.32)

ББК 22.1я723

П68

Авторы:

Попов Александр Михайлович — доктор технических наук, профессор, заместитель директора по научной работе Института машиноведения имени А. А. Благоданова Российской Академии наук;

Сотников Валерий Николаевич — кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры математики и математических методов в экономике Института экономики и предпринимательства.

Рецензенты:

Гатаулин А. М. — доктор экономических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии сельскохозяйственных наук;

Струнков С. П. — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института системных исследований Российской академии наук.

Попов, А. М.

П68 Теория вероятностей : учеб. пособие для СПО / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 215 с. — Серия : Профессиональное образование.

ISBN 978-5-534-01616-1

В учебном пособии полно и систематически изложен раздел «Теория вероятностей» дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». Рассматриваются базовые понятия случайных событий, величин и их вероятностей. Приводятся основные законы распределения, законы больших чисел. Даются основные понятия многомерных случайных величин, случайных процессов, элементов теории массового обслуживания.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов экономических образовательных учреждений среднего профессионального образования.

УДК 51(075.32)

ББК 22.1я723



Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав. Правовую поддержку издательства обеспечивает юридическая компания «Дельфи».

© Попов А. М., Сотников В. Н., 2011

© Попов А. М., Сотников В. Н., 2014,
с изменениями

© ООО «Издательство Юрайт», 2019

ISBN 978-5-534-01616-1

Оглавление

Предисловие	5
Введение.....	8
Глава 1. Случайные события и их вероятности	10
1.1. Случайные события.....	10
1.2. Вероятность события	15
1.3. Элементы комбинаторики.....	18
1.4. Основные теоремы теории вероятностей	26
1.5. Схема испытаний Бернулли. Приближенные формулы.....	34
<i>Вопросы и задания для самоконтроля</i>	<i>40</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения.....</i>	<i>41</i>
Глава 2. Случайные величины	46
2.1. Дискретные случайные величины.....	46
2.2. Непрерывные случайные величины	62
<i>Вопросы и задания для самоконтроля</i>	<i>69</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения.....</i>	<i>70</i>
Глава 3. Основные законы распределения	72
3.1. Биномиальное распределение.....	72
3.2. Геометрическое распределение	75
3.3. Закон Пуассона	75
3.4. Равномерное распределение.....	76
3.5. Показательное (экспоненциальное) распределение	79
3.6. Нормальное распределение и функция Лапласа	82
3.7. Логнормальное распределение	88
<i>Вопросы и задания для самоконтроля</i>	<i>89</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения.....</i>	<i>90</i>
Глава 4. Закон больших чисел. Предельные теоремы	92
4.1. Основные неравенства закона больших чисел.....	92
4.2. Теорема Чебышева	93
4.3. Теорема Бернулли	95
4.4. Центральная предельная теорема.....	97
<i>Вопросы и задания для самоконтроля</i>	<i>100</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения.....</i>	<i>100</i>
Глава 5. Многомерные случайные величины	102
5.1. Дискретные двумерные случайные величины.....	104
5.2. Непрерывные двумерные случайные величины	105
5.3. Условные законы распределения	107

5.4. Независимые случайные величины. Коэффициент корреляции.....	110
Вопросы и задания для самоконтроля	113
Задачи для самостоятельного решения.....	114
Глава 6. Случайные процессы	115
6.1. Основные понятия теории случайных функций.....	115
6.2. Вероятностные характеристики случайного процесса.....	116
6.3. Операции над случайными процессами	122
6.4. Основные типы случайных процессов.....	123
Вопросы и задания для самоконтроля	124
Глава 7. Элементы теории массового обслуживания.....	125
7.1. Основные понятия. Классификация систем массового обслуживания	125
7.2. Понятие марковского случайного процесса. Потоки событий.....	127
7.3. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний	130
7.4. Процесс гибели и размножения	135
7.5. Системы массового обслуживания с отказами.....	137
7.6. Системы массового обслуживания с ожиданием.....	142
Вопросы и задания для самоконтроля	145
Задачи для самостоятельного решения.....	145
Тесты.....	147
Ответы на вопросы тестов.....	177
Ответы к задачам	178
Список литературы.....	181
Приложения.....	183
Приложение 1. Краткий справочник по математике.....	183
Приложение 2. Значения функции Гаусса.....	204
Приложение 3. Значения функции Лапласа.....	207
Приложение 4. Значения функции Пуассона.....	210
Приложение 5. Равномерно распределенные случайные числа.....	213

Предисловие

Учебное пособие подготовлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования (ФГОС СПО) по направлениям экономики и менеджмента. Дисциплина входит в базовую часть математического и естественнонаучного цикла.

В учебном пособии достаточно полно и систематически изложен раздел «Теория вероятностей» дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» в соответствии с модулями ФГОС СПО. Изучение данного модуля базируется на знании основ высшей математики.

Учебное пособие может быть рекомендовано как часть обучающего комплекса по дисциплинам «Математика», «Статистика (социально-экономическая)», «Методы моделирования и прогнозирования экономики», «Методы оптимальных решений», «Методы принятия управленческих решений», «Экономико-математическое моделирование и прогнозирование».

Книга написана на основе многолетнего опыта чтения лекций на факультетах экономики и управления Института экономики и предпринимательства (г. Москва). Рассматриваются базовые понятия случайных событий, величин и их вероятностей. Приводятся основные законы распределения, законы больших чисел. Даются основные понятия многомерных случайных величин, случайных процессов, элементов теории массового обслуживания.

В заключительной части учебного пособия приводятся тесты, составленные на основе рекомендаций Национального аккредитационного агентства в сфере образования.

Главы 5, 6 написаны в основном для специальности «Прикладная информатика».

Учебное пособие содержит большое количество примеров, поясняющих существо рассматриваемых тем. В конце каждой главы приводятся вопросы для самоконтроля,

а также задачи для самостоятельного решения с ответами в конце книги.

Нумерация примеров, рисунков и таблиц произведена отдельно по главам: первая цифра означает номер главы, вторая — номер примера, рисунка или таблицы в главе. Окончание примера отмечено значком ►. Для удобства работы примеры и пояснения выделены шрифтом.

Авторы учебника стремились в минимальном объеме на доступном уровне изложить модуль без использования сложных формул и трактовок.

В конце книги приводится список литературы для углубленного изучения отдельных тем. Там же оформлен в виде приложений справочный материал по математическим формулам, физическим величинам и таблицам математической статистики.

Авторы считают приятным долгом поблагодарить рецензентов: доктора физико-математических наук, профессора Э. М. Галеева (МГУ им. М. В. Ломоносова) и доктора физико-математических наук, профессора С. П. Стрункова (НИИ системных исследований РАН), взявших на себя нелегкий труд рецензирования рукописи книги.

В совокупности с другими дисциплинами базовой части математического цикла ФГОС СПО дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» обеспечивает инструментарий формирования профессиональных компетенций. Здесь теория вероятностей рассматривается с целью ее использования в экономической деятельности. Ряд приводимых примеров не просто поясняют существо излагаемых тем, а имеют практическую направленность в зависимости от профиля обучения студента.

Изучив материал учебного пособия, студент должен освоить:

трудовые действия

- владение математическими методами решения типовых экономических задач;
- владение методами построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов;

необходимые умения

- пользоваться математическим языком и математической символикой при построении экономических моделей;

-
- решать типовые математические задачи, используемые при исследовании экономических процессов;
 - обрабатывать эмпирические данные;

необходимые знания

- основные понятия и методы решения задач теории вероятностей;
- современные принципы обработки деловой информации.

Введение

Теория вероятностей как математическая наука изучает случайные события, которые повторяются многократно, и, быть может, с разными значениями в заданных условиях наблюдения. Такие события характеризуются вероятностью их появления.

С XVII в. начинается развитие очень важного раздела математики — теории вероятностей. В ее основе лежали труды таких выдающихся математиков, как Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс. При этом первые вклады в теорию вероятностей были сделаны в связи с изучением азартных игр. Однако уже в конце XVII в. начали пользоваться теорией вероятностей при страховании кораблей от случайностей.

В XVIII в. для развития теории вероятностей много сделали швейцарец Я. Бернулли, французы П. Лаплас и С. Пуассон, «король математиков» немецкий ученый К. Гаусс. Наибольшее развитие основ теории вероятностей и математической статистики как прикладной науки приходится на XIX—XX вв.

В середине XIX в. большой вклад в развитие теории вероятностей и математической статистики внесли труды знаменитого русского математика П. Чебышева. Он нашел новые методы решения ранее поставленных задач и сумел создать вокруг себя большую группу молодых ученых. Некоторые из них, например, А. Марков, А. Ляпунов, впоследствии достигли мировой известности.

Работы современных математиков А. Н. Колмогорова, Б. В. Гнеденко, Р. Фишера, Э. Пирсона и др. позволили решить ряд важных практических задач, связанных с прогнозированием и принятием решений.

Теория вероятностей является базовой наукой математической статистики, которая, анализируя выборку, с определенной точностью дает прогноз всей генеральной совокупности. Невозможно проследить здесь, хотя бы и бегло, успехи теории вероятностей и математической статистики за последние столетия. Новые теории в ней возникают

теперь не только в результате запросов других наук, но и вследствие внутренней потребности самой математики.

Потребности развития самой теории вероятностей, «математизация» других областей науки, проникновение математических методов во многие сферы практической деятельности, прогресс вычислительной техники привели к появлению новых математических дисциплин, например, теории систем массового обслуживания, исследования операций, теории игр, математической экономики и др.

Глава 1

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

После изучения главы 1 бакалавр должен:

знать

- основные понятия, категории и инструменты теории вероятностей;
- определения и свойства вероятностей;
- основные теоремы теории вероятностей;
- элементы комбинаторики;

уметь

- решать задачи вероятностного характера, использовать различные методы при анализе конкретных ситуаций;

владеть

- методами решения задач с использованием асимптотических формул.
-

1.1. Случайные события

В основе теории вероятностей лежит понятие «событие». Так же как понятия «*число*», «*точка*», «*множество*», понятие «*событие*» в математике не определяется через другие, более простые понятия.

Под **событием** интуитивно будем понимать любое действие (явление), которое может произойти или не произойти, или любой результат, который может наступить или не наступить в данных условиях.

Пример 1.1. Примеры событий:

- выпадение герба при подбрасывании монеты;
- выигрыш автомобиля по лотерейному билету;
- появление бракованной детали на сборке изделия;
- приход группы в полном составе на лекцию по математике;
- попадание мяча в ворота после удара футболиста и т.д. ►

Для того чтобы могло произойти или не произойти то или иное событие, необходимо наличие определенного комплекса условий. Будем называть этот комплекс условий

экспериментом (испытанием, опытом) и обозначать его S . При этом эксперимент может быть осуществлен человеком, а может проводиться и независимо от человека, выступающего в этом случае в роли наблюдателя.

Различают несколько видов событий.

- **Достоверное событие** — такое событие, которое в результате эксперимента S обязательно происходит. Такое событие обычно обозначается U или Ω .

Пример 1.2. Примеры достоверных событий:

- выпадение числа очков менее 10 при однократном бросании игральной кости;
- отсутствие Солнца на московском небе в полночь. ►

- **Невозможное событие** (обозначение $\emptyset$) — такое событие, которое в результате эксперимента S никогда не происходит.

Пример 1.3. Примеры невозможных событий:

- выпадение 10 очков при однократном бросании игрального кубика;
- встреча на улице с человеком ростом свыше 5 метров. ►

- **Случайное событие** (обозначение $A, B, C, A_1, A_2, \dots$) — такое событие, которое в результате эксперимента S может произойти, а может и не произойти.

Пример 1.4. Примеры случайных событий:

- выпадение 3 очков при однократном бросании игральной кости;
- завершение футбольного матча «Локомотив» — ЦСКА со счетом 1 : 1. ►

- Если в эксперименте S из того, что произошло событие A , следует, что обязательно произошло и событие B , то говорят, что **A влечет за собой B** , и обозначают $A \rightarrow B$.

Пример 1.5. Пусть A — выпадение двух очков при бросании игрального кубика, а B — выпадение четного числа очков. Тогда $A \rightarrow B$. ►

- Если одновременно $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$, то события A и B называются **равносильными** или **равными событиями** ($A = B$).
- Два или несколько событий называются **равновозможными событиями**, если объективно шансы их наступления одинаковы.

Например, события $A_1 - A_6$, состоящие в выпадении соответствующего количества очков на игральном кубике, являются равновозможными.

В ряде задач за равновозможные могут быть приняты события, по которым отсутствует информация о различии их шансов на наступление, хотя объективно эти шансы могут быть различными.

Пример 1.6. Равновозможными следует считать события A — присутствие Иванова и B — присутствие Петрова на данной лекции по математике, если не знать, что Петров менее прилежен, чем Иванов, что у него болят ноги и что электричку, на которой Петров ездит в институт, часто отменяют. Если такая информация имеется, то, конечно, A и B не следует считать равновозможными. ►

- Событие, обозначаемое $\bar{A}$ и состоящее в ненаступлении события A , называется **противоположным** событию A .

Пример 1.7. Пусть A — попадание стрелка в «десятку» при выстреле из винтовки по мишени. Тогда $\bar{A}$ — попадание в любую другую область мишени или за ее пределы. ►

- Если события могут произойти одновременно, они называются **совместными событиями**.
- Два или несколько событий называются **независимыми событиями**, если шансы на наступление каждого из них не зависят от того, произошли какие-либо из остальных событий или нет.

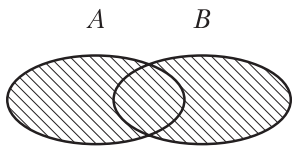
Рассмотрим **элементарные действия** над событиями.

1. Пусть в результате эксперимента S могут произойти события A и B . Тогда **суммой** этих двух событий называется событие, обозначаемое $A + B$ и состоящее в том, что произошло либо событие A , либо событие B , либо и A , и B вместе.

Пусть эксперимент S состоит в бросании точки на лист, а события A и B — попадание точки в овалы A и B , нарисованные ниже. Тогда попадание точки в заштрихованную область означает наступление суммы событий $A + B$.

Приведенные далее рисунки, поясняющие действия над событиями, называются **диаграммами Эйлера — Венна**.

Понятие суммы событий можно распространить на несколько событий.

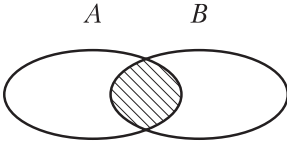


- **Суммой событий** $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется событие $A_1 + A_2 + \dots + A_n$, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из этих событий.

Пример 1.8. Пусть при выборе одного из чисел от 1 до 13 событие A означает выбор четного числа (т.е. событие A состоит из элементарных событий — выборов одного из чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12), событие B — выбор числа, кратного 3 (т.е. событие B состоит из

элементарных событий — выборов одного из чисел 3, 6, 9, 12). Тогда событие $A + B$ означает выбор числа, кратного или 2, или 3 (при этом не исключается, что число кратно и 2, и 3), т.е. событие $A + B$ состоит из элементарных событий — выборов одного из чисел 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12. ►

2. Пусть в результате эксперимента S могут произойти события A и B . Тогда **произведением** этих двух событий называется событие, обозначаемое AB или $A \cdot B$ и состоящее в том, что произошли и событие A , и событие B . На рисунке заштрихована область, попадание в которую означает наступление произведения событий AB .



Понятие произведения событий также можно распространить на несколько событий.

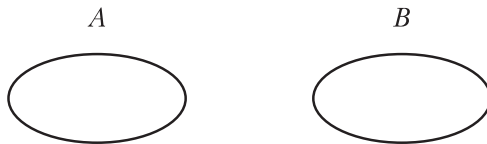
• **Произведением событий** $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется событие $A_1 A_2 \dots A_n$, состоящее в том, что произошли все эти события.

В некоторых книгах вместо терминов «сумма» и «произведение» событий используют термины и обозначения из теории множеств и говорят об объединении событий $(A \cup B)$ и пересечении (или совмещении) событий $(A \cap B)$. Однако развитие теории вероятностей шло автономно от теории множеств, и в большинстве книг используются принятые в теории вероятностей терминология и обозначения, которые и будут использованы в нашем курсе.

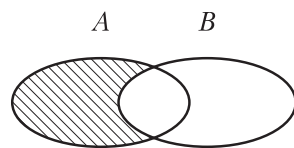
• События A и B называются **несовместными**, если $AB = \emptyset$.

Пример 1.9. Примеры несовместных событий: выпадение двух и трех очков при однократном бросании игральной кости; получение студентом оценок «отлично» и «неудовлетворительно» на одном и том же экзамене. ►

Приведенный ниже рисунок иллюстрирует несовместные события A и B .



3. **Разностью** событий A и B называется событие, состоящее в наступлении A и ненаступлении B (см. рисунок справа). Разность A и B обозначается $A - B$. Это действие над событиями



используется редко. Как правило, при этом рассматривается равносильное ему событие $A \cdot \bar{B}$.

Пример 1.10.

1. Пусть при выборе одного из чисел от 1 до 13 событие A означает выбор четного числа, событие B — выбор числа, кратного 3. Тогда событие $A \cdot B$ означает выбор числа, кратного и 2, и 3 одновременно, т.е. событие $A \cdot B$ состоит из элементарных событий — выборов одного из чисел 6, 12.

2. Пусть эксперимент S состоит в выборе одного числа из множества чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Пусть далее $A = \{3, 4, 8, 9, 10\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$. Тогда события A и B несовместны, т.е. $AB = \emptyset$ (невозможное событие).

При этом $A + B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$. Событием, противоположным A , является событие $\bar{A} = \{1, 2, 5, 6, 7\}$. Разностью событий A и B будет событие $A - B = \{3, 4, 8, 9, 10\}$. ►

Легко проверить, что сумма и произведение событий обладают следующими свойствами:

$A + B = B + A$ — коммутативность суммы;

$AB = BA$ — коммутативность произведения;

$A + (B + C) = (A + B) + C$ — ассоциативность суммы;

$A(BC) = (AB)C$ — ассоциативность произведения;

$A(B + C) = AB + AC$ — дистрибутивность.

4. Считается, что событие A **распадается** на n частных случаев $A_1, A_2, \dots, A_n$, если сумма этих частных случаев представляет собой событие A , а сами они попарно несовместны. Т.е. должны выполняться два условия:

а) $A_1 + A_2 + \dots + A_n = A$;

б) $A_i A_j = \emptyset$ при $i \uparrow j$.

Если на n частных случаев распадается достоверное событие U , то говорят, что эти частные случаи образуют **полную группу событий**. Это означает, что в результате эксперимента S должно произойти одно, и только одно, такое событие.

Пример 1.11. Полную группу образуют шесть событий, состоящих в выпадении 1, 2, ..., 6 очков при бросании игральной кости. ►

Очевидно, что A и $\bar{A}$ также образуют полную группу событий, так как $A + \bar{A} = U$ и $A\bar{A} = \emptyset$.

Непосредственно из введенных определений следуют равенства:

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}; \quad \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}.$$

Эти равенства называются **формулами де Моргана**.

Пример 1.12. Взятое наугад изделие некоторого производства может оказаться либо повышенного качества (событие A), либо обычного качества (событие B), либо бракованным (событие C). Тогда следующие события представляют собой:

$A + B$ — изделие небракованное;

$A + B$ — изделие бракованное;

AC — невозможное событие;

AC — достоверное событие. ►

- **Элементарными** называются те из событий, которые нельзя разложить на составляющие их события. Если элементарные события равновозможные и образуют полную группу событий, то их обычно называют **элементарными исходами**.

Пример 1.13. В опыте с бросанием игральной кости (кубика) элементарными событиями являются выпадения чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. В этом же опыте событиями являются выпадения четного или нечетного числа. ►

Будем называть совокупность элементарных исходов и всех событий, которые они за собой влекут, **пространством событий** Ω . Любое событие A из пространства Ω можно составить из элементарных событий.

1.2. Вероятность события

Представление о случайности событий связано с невозможностью предсказать заранее исход того или иного эксперимента. Однако, например, при многократном бросании монеты выясняется, что примерно в половине случаев выпадает герб. При исследовании большого количества одинаковых испытаний обнаруживаются определенные закономерности, которые можно описать, используя понятие вероятности.

Под **вероятностью события** понимается некоторая числовая характеристика возможности наступления этого события. Существует несколько подходов к определению вероятности.

Классическое определение вероятности

- **Классической схемой** называется испытание, при котором число элементарных исходов конечно.
- Элементарный исход называется **благоприятствующим** событию A , если его появление влечет наступление события A .

- **Классической вероятностью** события A называется отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A , к числу n всех элементарных событий из схемы

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где $m \leq n$.

Исходя из классического определения вероятности, можно отметить несколько свойств вероятности.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ для любого события A .
2. Вероятность достоверного события

$$P(U) = \frac{n}{n} = 1.$$

3. Вероятность противоположного события

$$P(\bar{A}) = \frac{n - m}{n} = 1 - P(A).$$

Ясно также, что

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

4. Вероятность невозможного события

$$P(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0.$$

Пример 1.14. В опыте с бросанием игральной кости число всех исходов n равно 6 и все они равновозможные. Пусть событие A означает появление четного числа. Тогда для этого события благоприятными исходами будут появления чисел 2, 4, 6. Их количество m равно 3. Поэтому вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 1.15. В ящике перемешаны 20 годных деталей и 5 бракованных. Сборщик наугад достает одну деталь. Чему равна вероятность, что она бракованная?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что извлеченная деталь бракованная. Вероятность извлечения бракованной детали $P(A)$ — ?

Общее количество элементарных исходов определяется общим количеством деталей $n = 25$.

По условию задачи количество благоприятных исходов определяется $m = 5$. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0,2. \quad \blacktriangleright$$

Пусть пространство событий Ω состоит из n элементарных исходов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Тогда для каждого ω_i благоприятным исходом будет только само ω_i , и для него $m = 1$. Поэтому

$$P(\omega_i) = \frac{m}{n} = \frac{1}{n}.$$

Таким образом, если в классической схеме пространство Ω состоит из n элементарных равновозможных событий, то вероятность наступления каждого из них равна $1/n$.

Статистическое определение вероятности

Пусть при проведении n испытаний некоторое событие A появилось m раз. Многочисленные эксперименты такого рода показывают, что при больших n отношение m/n , называемое **частотой** или **относительной частотой** $W_n(A)$ наступления события A , остается примерно постоянным. Если n достаточно велико, то обычно принимают

$$P(A) = W_n(A).$$

• **Вероятностью события** A называется постоянная величина, возле которой колеблются значения частоты $W_n(A)$. При неограниченном возрастании числа n частоты будут все ближе и ближе к вероятности.

Пример 1.16. Английский ученый Пирсон произвел 23 000 бросаний монеты. При этом герб появился 11 512 раз. Значит, частота появления герба в опыте ученого равна

$$\frac{11512}{23000} \approx 0,5005.$$

Этот пример показывает, что за вероятность появления герба можно взять число 0,5. $\blacktriangleright$

Пример 1.17. Произведя 100 выстрелов, стрелок попал в цель 90 раз. Какой следует принять вероятность попадания в цель этого стрелка при отдельном выстреле?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в попадании стрелка в цель при отдельном выстреле. $P(A)$ — ?

$$W_{100}(A) = \frac{90}{100} = 0,9.$$

Число 100 можно считать достаточно большим числом испытаний. Поэтому

$$P(A) = W_{100}(A) = 0,9.$$



1.3. Элементы комбинаторики

Для решения задач с использованием классического определения вероятности часто необходимо знать основные формулы комбинаторики — раздела математики, который изучает вопросы выбора и расположения элементов в конечных множествах по различным правилам и проводит подсчет всех способов выбора и расположения.

Перестановки

Поставим каждому элементу множества U номер, тогда получим *упорядоченное множество*, состоящее из n элементов. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, называются *перестановками*.

Пример 1.18. Примеры перестановок:

- распределение n различных должностей среди n человек;
- расположение n различных предметов в одном ряду.



Сколько различных перестановок можно образовать из n элементов множества? Число перестановок обозначается P_n .

Чтобы вывести формулу числа перестановок n элементов, представим себе n ячеек, пронумерованных числами 1, 2, ..., n . Все перестановки будем образовывать, располагая элементы в этих ячейках. В первую ячейку можно занести любой из n элементов (иначе: первую ячейку можно заполнить n различными способами). Заполнив первую ячейку, можно $(n - 1)$ способом заполнить вторую ячейку (иначе: при каждом способе заполнения первой ячейки находится $(n - 1)$ способ заполнения второй ячейки).

Таким образом, существует $n(n - 1)$ способов заполнения двух первых ячеек. При заполнении первых двух ячеек можно найти $(n - 2)$ способов заполнения третьей ячейки, откуда получается, что три ячейки можно заполнить $n(n - 1)(n - 2)$ способами. Продолжая этот процесс, получим, что число способов заполнения n ячеек равно $n(n - 1)(n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Это произведение определяет число перестановок, обозначается $n!$ и читается « n -факториал»

$$P_n = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Пример 1.19. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. ►

Считается, что $1! = 1$; $0! = 1$.

Пример 1.20. На книжной полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно расположить эти книги на полке?

Решение. Рассмотрим число перестановок этих книг на полке. Имеем

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120. \quad \text{►}$$

Размещения

Рассмотрим множество, состоящее из n элементов.

• **Размещением** из n элементов по k называется упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, выбранное из множества n элементов и расположенное в определенном порядке. Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k (читается « A из n по k »).

Пример 1.21. Примеры задач, приводящих к необходимости подсчета числа размещений:

1. Сколькими способами можно выбрать из 15 кандидатов 5 человек и назначить их на 5 различных должностей?

2. Сколькими способами можно из 20 книг отобрать 12 и расставить их в ряд на полке? ►

В задачах о размещениях полагается $k < n$. Если $k = n$, то легко получить $A_n^k = A_n^n = P_n = n!$

Для подсчета A_n^k используем тот же метод, что использовался для подсчета P_n , только здесь берется k ячеек. Первую ячейку можно заполнить n способами, вторую, при заполненной первой, можно заполнить $(n-1)$ способами. Можно продолжать этот процесс до заполнения последней k -й ячейки. Эту ячейку при заполненных первых $k-1$ ячейках можно заполнить $n-(k-1)$ способами (или $n-k+1$). Таким образом, все k ячеек заполняются числом способов, равным

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+2)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Таким образом, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Пример 1.22. Сколько существует различных вариантов выбора 4 кандидатур из 9 специалистов для поездки в четыре различные страны?

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024. \quad \blacktriangleright$$

Заметим, что два размещения считаются **различными**, если они либо отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, либо состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке.

Сочетания

• **Сочетанием** из n (элементов) по k называется подмножество, состоящее из k элементов, выбранное из множества U в n элементов.

Порядок расположения выбранных k элементов не имеет значения.

Одно сочетание от другого отличается только составом выбранных элементов (но не порядком их расположения, как у размещений).

Общее число сочетаний из n по k обозначается C_n^k .

Выведем формулу для подсчета числа сочетаний. Пусть имеется множество n элементов и из него нужно образовать упорядоченное подмножество, содержащее k элементов (т.е. образовать размещение). Очевидно, что одному сочетанию из n по k соответствует $k!$ размещений из n по k , так как перестановок выбранных k элементов существует $k!$. Следовательно, при одних и тех же значениях n и k число сочетаний в $k!$ меньше числа размещений, т.е.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

• Задачи на подсчет числа подмножеств конечного множества называются **комбинаторными**.

Пример 1.23. Сколькими способами из 10 кандидатов можно выбрать:

- а) председателя, зам. председателя и секретаря?
- б) трех делегатов на конференцию?

Решение. В обоих случаях мы выбираем из множества 10 элементов три элемента, т.е. $n = 10$; $k = 3$, но в случае а) располагаем их на определенных местах, т.е. на указанных должностях. В случае б) порядок их расположения ни на что не влияет, так как статус делегатов одинаков. Поэтому

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} =$$

а) $= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720.$

$$б) C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120. \quad \blacktriangleright$$

Пример 1.24. Пять студентов: Иванов, Петров, Сидоров, Абрамов и Михайлов произвольно садятся в пять кресел, стоящих в ряд. Какова вероятность того, что они сядут по алфавиту?

Решение. A — событие, состоящее в том, что студенты сядут по алфавиту. Вероятность этого события $P(A)$ — ?

Так как произвольные расположения студентов в креслах представляют собой различные перестановки, то за равновозможные частные случаи удобнее всего принять конкретные перестановки (нет никаких причин считать, что шансы на реализацию различных перестановок будут разными). Тогда

$$n = P_5 = 5! = 120; m = 1.$$

Очевидно, что расположению по алфавиту соответствует только одна перестановка: Абрамов, Иванов, Михайлов, Петров, Сидоров. Таким образом,

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 1.25. Из семи карточек разрезной азбуки сложено слово КОРОБОК. Найти вероятность того, что если наугад по очереди взять из этих карточек три и выложить в ряд в порядке появления, то получится слово РОК.

Решение. A — событие, состоящее в том, что из взятых наугад карточек получится слово РОК. Вероятность этого события $P(A)$ — ?

Ясно, что здесь имеем дело с размещениями из 7 (общее количество карточек) по 3 (количество букв в слове РОК). Поэтому за общее количество элементарных исходов следует принять число размещений

$$n = A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Далее, чтобы произошло событие A , необходима строго определенная первая карточка (с буквой Р), к ней должна быть добавлена одна из трех карточек с буквой О и затем одна из двух карточек с буквой К. Следовательно, общее число размещений, при которых происходит событие A , равно

$$m = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6.$$

Отсюда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35} \approx 0,03. \quad \blacktriangleright$$

Пример 1.26. Из чисел от 1 до 10 случайно выбираются три различных числа. Найти вероятность того, что все эти три числа нечетные.

Решение. A — событие, состоящее в том, что все три выбранных числа нечетные. Вероятность этого события $P(A)$ — ?

Так как от того, как расположатся выбранные числа, не зависит их четность или нечетность, то за общее количество равновозможных частных случаев принимаем число сочетаний из 10 по 3. Тогда

$$n = C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = 120.$$

Событие A произойдет только тогда, когда все три карточки будут выбраны из пяти нечетных чисел (1; 3; 5; 7; 9). Следовательно, число равновозможных частных случаев, при которых происходит событие A , равно числу способов, которыми из 5 нечетных чисел можно выбрать три числа. То есть,

$$m = C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = 10.$$

Отсюда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 1.27. В лифт 9-этажного дома на первом этаже входят 4 человека. Какова вероятность того, что они выйдут на разных этажах?

Решение. Обозначим: событие A — все выйдут на разных этажах. Тогда вероятность события $P(A)$ — ?

Согласно классическому определению вероятности

$$P = \frac{m}{n},$$

где n — число всех возможных способов, m — число способов, благоприятствующих событию. У первого пассажира лифта есть 8 возможностей выйти (на этажах 2–9), тогда у второго остается 7 возможностей, у третьего — 6 и у четвертого — 5. Значит, событие A может произойти в $m = A_8^4$. Так как каждый пассажир лифта может выйти на любом из этажей, то число всех возможностей n равно 8^4 . Поэтому

$$P = \frac{A_8^4}{8^4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{8^4} = 0,41. \quad \blacktriangleright$$

Пример 1.28. 1. Из семи заводов организация должна выбрать три для размещения трех различных заказов. Заказ нельзя дробить,

т.е. распределять его на несколько заводов. Сколькими способами можно разместить заказы?

Так как все заводы различны и из условия ясно, что каждый завод может либо получить один заказ, либо не получить ни одного, здесь нужно считать число размещений

$$A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

2. Если из текста задачи 1 убрать условие различия трех заказов, сохранив все остальные условия, получим другую задачу. Теперь способ размещения заказов определяется только выбором тройки заводов, так как все эти заводы получают одинаковые заказы, и число вариантов определяется как число сочетаний

$$C_7^3 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35.$$

3. Имеются 7 заводов. Сколькими способами организация может разместить на них три различных производственных заказа?

В отличие от условия задачи 1, здесь организация может отдать все три заказа первому заводу или, например, отдать два заказа второму заводу, а один — седьмому.

Задача решается так. Первый заказ может быть размещен семью различными способами (на первом заводе, на втором и т.д.). Поместив первый заказ, имеем семь вариантов размещения второго (иначе, каждый способ размещения первого заказа может сопровождаться семью способами размещения второго).

Таким образом, существует $7 \cdot 7 = 49$ способов размещения первых двух заказов. Разместив их каким-либо образом, можем найти 7 вариантов размещения третьего (иначе, каждый способ размещения первых двух заказов может сопровождаться семью различными способами распределения третьего заказа). Следовательно, существуют $49 \cdot 7 = 7^3$ способов размещения трех заказов. (Если бы заказов было n , то получилось бы 7^n способов размещения.)

4. Как решать задачу 3, если в ее тексте вместо слов «различных производственных заказа» поставить «одинаковых производственных заказа»?

5. Добавим к условию задачи 1 одну фразу: организация также должна распределить три различных заказа на изготовление деревянных перекрытий среди 4 лесопилок. Сколькими способами могут быть распределены все заказы?

Каждый из A_7^3 способов распределения заказов на заводах может сопровождаться A_4^3 способами размещения заказов на лесопилках. Общее число возможных способов размещения всех заказов будет равно

$$A_7^3 \cdot A_4^3 = \frac{7!}{4!} \cdot \frac{4!}{1!} = 7!.$$



Пример 1.29. Упростить выражение $B = \frac{7!4!}{10!} \left(\frac{9!}{3!6!} - \frac{9!}{2!7!} \right)$.

Решение. Было бы неправильным просто вычислить все факториалы, после чего перейти к арифметике — слишком большие числа. Используем, где возможно, расчленение факториалов:

$$\frac{7!4!}{10!} = \frac{7! \cdot 4!}{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30};$$

$$\frac{9!}{3!6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{3!6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84;$$

$$\frac{9!}{2!7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9}{2!7!} = \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 36.$$

Следовательно, $B = \frac{1}{30}(84 - 36) = \frac{48}{30} = 1,6$. ►

Пример 1.30. Упростить выражение $A = \frac{5!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{(m-1)! \cdot 3!}$.

Решение. Напомним, что $(m+1)! = m! \cdot (m+1)$; $(m-1)! = \frac{m!}{m}$ и $5! = 3! \cdot 4 \cdot 5$, тогда

$$A = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{m \cdot (m+1)} \cdot \frac{m!(m+1)}{\frac{m!}{m} \cdot 3!} = 4 \cdot 5 = 20. \quad \text{►}$$

Бином Ньютона (полиномиальная формула)

• **Бином Ньютона** — это формула, определяющая выражение $(a + b)^n$ в виде многочлена. Эта формула имеет вид

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + b^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i,$$

где C_n^k — число сочетаний из n элементов по k .

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Широко известные формулы сокращенного умножения квадрата суммы и разности, куба суммы и разности являются частными случаями бинома Ньютона.

Когда степень бинома невысока, коэффициенты многочлена могут быть найдены не расчетом по формуле количества сочетаний, а с помощью так называемого **треугольника Паскаля**.

Этот треугольник имеет вид

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Формула бинома Ньютона может быть обобщена для произвольного числа слагаемых.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k};$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

Напомним, что при вычислениях $0!$ принимается равным 1.

Пример 1.31. В разложении $(x^k + y^p)^n$ найти член, содержащий x^α , если $k = 3, p = 2, n = 8, \alpha = 9$.

Решение. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$(x^k + y^p)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i (x^k)^{n-i} (y^p)^i.$$

С учетом числовых значений:

$$(x^3 + y^2)^8 = \sum_{i=0}^8 C_8^i x^{3(8-i)} y^{2i}.$$

В принципе, можно написать разложение этого выражения в многочлен, определить коэффициенты либо непосредственно, либо из треугольника Паскаля (степень бинома сравнительно невелика), однако делать это не обязательно, так как необходимо найти только член разложения, содержащий x^9 .

Найдем число i , соответствующее этому члену: $3(8 - i) = 9$; $i = 5$.

$$\text{Находим: } C_8^5 x^9 y^{10} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} x^9 y^{10} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} x^9 y^{10} = 56 x^9 y^{10}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 1.32. В разложении $(x + y + z + w)^m$ найти члены, содержащие x^6 , если $m = 9$.

Решение. По обобщенной формуле бинома Ньютона получаем

$$(x + y + z + w)^9 = \sum \frac{9!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} w^{n_4}.$$

Для нахождения полного разложения необходимо определить все возможные значения n_j , однако это связано с громадными вычислениями.

Так как надо найти только члены, содержащие x^6 , то $n_1 = 6$, а сумма всех четырех значений n равна 9. Значит, сумма $n_2 + n_3 + n_4 = 3$.

Рассмотрим возможные значения этих величин, оформленных в виде таблицы:

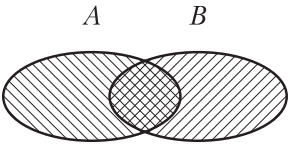
n_2	0	0	3	1	1	0	2	0	2	1
n_3	0	3	0	2	0	1	1	2	0	1
n_4	3	0	0	0	2	2	0	1	1	1

Тогда искомые члены разложения:

$84x^6w^3$; $84x^6y^3$; $84x^6z^3$; $252x^6yz^2$; $252x^6yw^2$ и т.д. ►

1.4. Основные теоремы теории вероятностей

Событие, являющееся результатом действий над простыми событиями, называется **сложным**. То есть сумма событий и произведение событий — **сложные события**. Зная вероятности простых событий, можно найти вероятность сложных.



Теорема сложения

Сформулируем правило нахождения вероятности суммы событий, которое называется **теоремой сложения вероятностей**.

• **Теорема.** Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения.

Пусть события A и B совместные. Тогда

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

В справедливости этой формулы можно убедиться из приведенного рисунка: так как при сложении вероятностей $P(A)$ и $P(B)$ вероятность события AB учтена дважды (на рисунке двойная штриховка), то один раз ее надо вычесть.

• Если A и B события несовместные, то $P(AB) = P(\emptyset) = 0$ и формула теоремы сложения вероятностей совместных событий приобретает вид

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Для n несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Следствия.

1. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Пример 1.33. Пусть пространством событий является множество чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, в котором все числа — элементарные события — равновозможные, вероятность каждого из них равна $1/10$. Пусть $A = \{1, 3, 5, 9\}$, $B = \{2, 4, 10\}$, тогда A и B несовместны и $A + B = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10\}$. При этом

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{3}{10}, \quad P(A + B) = \frac{7}{10}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 1.34. Пусть пространством событий является множество чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, в котором выбор каждого числа — элементарный исход. Пусть $A = \{1, 3, 5, 9, 10\}$, $B = \{2, 5, 6, 8, 9\}$, тогда $A \cdot B = \{5, 9\}$, $A + B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10\}$,

$$P(A) = \frac{5}{10}, \quad P(B) = \frac{5}{10}, \quad P(A \cdot B) = \frac{2}{10}, \quad P(A + B) = \frac{8}{10}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 1.35. Пусть в группе из 27 туристов 17 человек владеют английским языком, 6 — французским, а 2 — обоими языками. Найти вероятность того, что случайно выбранный из группы турист владеет, по крайней мере, одним из этих языков.

Решение. Обозначим события:

A — «выбранный турист владеет английским»;

B — «выбранный турист владеет французским».

Тогда событие $A + B$ означает, что турист владеет хотя бы одним из этих языков. Из условия задачи очевидно, что

$$P(A) = \frac{17}{27}, \quad P(B) = \frac{6}{27}, \quad P(A \cdot B) = \frac{2}{27}.$$

Тогда

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \frac{17}{27} + \frac{6}{27} - \frac{2}{27} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9} \approx 0,78. \quad \blacktriangleright$$

Теорема умножения. Условные вероятности

На практике часто встречаются ситуации, когда наступление некоторого события значительно меняет возможности

наступления других событий и их вероятности. Событие, состоящее в наступлении события B при условии, что произошло событие A , будем обозначать B/A . Вероятность этого события $P(B/A)$ называется **условной вероятностью** события B . В некоторых книгах эта вероятность обозначается $P_A(B)$.

Очевидно, что для независимых событий

$$P(B/A) = P(B) \text{ и } P(A/B) = P(A).$$

Иногда считается, что выполнение указанных равенств является определением **независимости** событий.

Если

$$P(B/A) \neq P(B) \text{ или } P(A/B) \neq P(A),$$

то события A и B однозначно являются **зависимыми**.

Пример 1.36. В ящике в произвольном порядке лежат 50 деталей: 20 деталей окрашенных и 30 — неокрашенных. Из 20 окрашенных деталей только 18 деталей годны. Из 30 неокрашенных деталей годны только 22 штуки. Сборщик наугад достает одну деталь.

Найти вероятность того, что:

- 1) извлеченная деталь годная, если неизвестно, окрашенная она или нет;
- 2) извлеченная деталь годная, если известно, что она окрашенная.

Решение. Обозначим события:

A — извлеченная деталь окрашенная;

B — извлеченная деталь годная.

При условии, что неизвестно извлеченная деталь окрашенная или нет, вероятность события равна $P(B)$ и определяется как

$$P(B) = \frac{18 + 22}{20 + 30} = \frac{40}{50} = 0,8.$$

При условии, что извлечена деталь окрашенная, вероятность того, что она годная, находим из формулы условной вероятности события B :

$$P(B/A) = \frac{18}{20} = 0,9.$$

События A и B — зависимые, так как $P(B/A) \neq P(B)$. ►

Получим теперь формулу для вероятности произведения двух зависимых событий A и B . Пусть достоверное событие U распадается на n элементарных исходов, из которых событие A происходит в m случаях, а событие AB — в r случаях. Тогда по определению условная вероятность события B равна

$$P(B/A) = \frac{r}{m},$$

так как, если событие A произошло, то общее число частных случаев равно m , а число частных случаев, в которых вместе с A произошло B , равно r .

Разделим числитель и знаменатель на n (при такой операции, конечно, дробь не изменится)

$$P(B/A) = \frac{r}{m} = \frac{r/n}{m/n} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Отсюда

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

и, следовательно,

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

- Полученную формулу часто называют **теоремой умножения вероятностей для двух зависимых событий**. Аналогично можно показать, что

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Если A и B события независимые, то

$$P(B/A) = P(B) \text{ и } P(A/B) = P(A)$$

и поэтому

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Можно доказать, что для трех зависимых событий A , B , C теорема умножения вероятностей имеет вид

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB).$$

Для n независимых событий

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

То есть вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

- **Следствие.** Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ определяется формулой

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n),$$

где $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ — противоположные события.

Пример 1.37. В условии предыдущей задачи найти вероятность того, что извлеченная деталь и окрашенная, и годная. Вероятность события $P(AB)$ — ?

Решение.

$P(B/A) = 0,9$ (см. предыдущую задачу).

Так как окрашенных деталей 20, а всего деталей $20 + 30$, то

$$P(A) = \frac{20}{20 + 30} = 0,4,$$

тогда

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0,4 \cdot 0,9 = 0,36. \quad \blacktriangleright$$

Пример 1.38. В ящике перемешаны 5 годных и 4 бракованные детали. Из него извлекают наугад две детали. Найти вероятность того, что все они годные.

Решение. Обозначим события:

A — первая извлеченная деталь годная;

B — вторая извлеченная деталь годная.

Вероятность события $P(AB)$ — ?

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Ясно, что $P(A) = \frac{5}{9}$, так как всего деталей в ящике 9, а годных из них 5. После того, как A произошло, т.е. извлечена годная деталь, в ящике осталось 8 деталей, из которых 4 — годные. Следовательно, вероятность

$$P(B/A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$P(AB) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18} \approx 0,28.$$

Следует отметить, что эта задача может быть решена и без использования теоремы умножения вероятностей, а с применением элементов комбинаторики. В этом случае обозначаем: A — обе извлеченные детали годные. Вероятность события $P(A)$ — ?

По аналогии с примером 1.26 с нечетными числами ясно, что

$$n = C_9^2 = \frac{9!}{(9-2)! \cdot 2!} = 36; \quad m = C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = 10;$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \approx 0,28. \quad \blacktriangleright$$

Пример 1.39. В ящике перемешаны 5 годных и 4 бракованные детали. Из него извлекают наугад три детали. Найти вероятность того, что все они годные.

Решение. 1-й способ (по теореме умножения вероятностей).

Обозначим события:

A — первая извлеченная деталь годная;

B — вторая извлеченная деталь годная;

C — третья извлеченная деталь годная.

Вероятность события $P(ABC)$ — ?

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB).$$

Ясно, что после извлечения первой детали $P(B/A) = \frac{4}{8}$. После того как произошли события A и B , в ящике осталось 7 деталей, из которых 3 — годные. Тогда $P(C/AB) = \frac{3}{7}$. Отсюда

$$P(ABC) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{126} = \frac{5}{42} \approx 0,12.$$

2-й способ (с применением элементов комбинаторики).

A — все три извлеченные детали годные. Вероятность события $P(A)$ — ?

$$n = C_9^3 = \frac{9!}{(9-3)! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84; \quad m = C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = 10;$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42} \approx 0,12. \quad \blacktriangleright$$

Пример 1.40. Три стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания для первого стрелка при отдельном выстреле равна 0,6; второго — 0,7 и третьего — 0,75. Найти вероятность попадания в цель хотя бы одного стрелка, если каждый сделает по одному выстрелу.

Решение. Обозначим события:

A — попал первый стрелок;

B — попал второй стрелок;

C — попал третий стрелок.

Вероятность события $P(A + B + C)$ — ?

В этой задаче нужно найти вероятность суммы трех совместных событий, так как по условию задачи требуется найти вероятность хотя бы одного из этих событий. Такая формула в теореме сложения вероятностей не приводилась. Заметим, что с увеличением числа событий число слагаемых в формуле вероятности суммы совместных событий сильно возрастает и формула становится достаточно сложной.

Поэтому при числе событий более двух для нахождения вероятности суммы совместных событий обычно используют теорему умножения вероятностей и понятие противоположного события.

Противоположным событием для $A + B + C$ (попадание хотя бы одного стрелка) является событие, состоящее в одновременном промахе всех трех стрелков, т.е.

$$\overline{A + B + C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}.$$

Используя свойство вероятности противоположного события и независимость как попаданий, так и промахов стрелков, имеем

$$\begin{aligned}
 P(A+B+C) &= 1 - P(\overline{A+B+C}) = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = \\
 &= 1 - (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C)) = 1 - (1 - 0,6)(1 - 0,7)(1 - 0,75) = \\
 &= 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,25 = 1 - 0,03 = 0,97.
 \end{aligned}$$

Пример 1.41. В одной урне 8 красных шаров и 2 белых, а в другой — 4 красных и 6 белых. Из каждой урны наугад достают по одному шару.

Найти вероятность того, что:

а) оба извлеченных шара красные;

б) хотя бы один из извлеченных шаров красный.

Решение. Обозначим события:

A — шар из первой урны — красный;

B — шар из второй урны — красный.

Ясно, что

$$P(A) = \frac{8}{10} = 0,8; \quad P(B) = \frac{4}{10} = 0,4.$$

а) вероятность того, что оба шара красные $P(AB)$ — ?

Так как A и B — события независимые, поэтому

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32.$$

б) вероятность того, что хотя бы один из извлеченных шаров красный $P(A+B)$ — ?

Ясно, что A и B — события совместные, поэтому

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,8 + 0,4 - 0,32 = 0,88.$$

Тот же результат можно получить, используя свойство вероятности противоположного события.

$$\begin{aligned}
 P(A+B) &= 1 - P(\overline{A+B}) = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = \\
 &= 1 - (1 - P(A))(1 - P(B)) = 1 - (1 - 0,8)(1 - 0,4) = \\
 &= 1 - 0,2 \cdot 0,6 = 1 - 0,12 = 0,88.
 \end{aligned}$$

Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть событие A может произойти только вместе с одним из частных случаев (гипотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу событий. Иначе говоря, сумма гипотез представляет собой достоверное событие $\sum_{i=1}^n H_i = U$ и все гипотезы попарно несовместны $H_i H_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Тогда событие A можно представить в следующем виде:

$$A = H_1 A + H_2 A + \dots + H_n A.$$

Отсюда, используя теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения для зависимых событий, получаем

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1A + H_2A + \dots + H_nA) = \\ &= P(H_1A) + P(H_2A) + \dots + P(H_nA) = \\ &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \dots + P(H_n)P(A/H_n). \end{aligned}$$

- Таким образом доказана формула, называемая **формулой полной вероятности**

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i).$$

Пусть теперь событие A произошло и необходимо с учетом этого провести корректировку доопытных вероятностей $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$. То есть надо найти послеопытные вероятности $P(H_1/A), P(H_2/A), \dots, P(H_n/A)$.

Для получения искомой формулы запишем теорему умножения вероятностей в двух формах

$$P(H_jA) = P(H_j) \cdot P(A/H_j) = P(A) \cdot P(H_j/A).$$

Отсюда следует, что

$$P(H_j/A) = \frac{P(H_j)P(A/H_j)}{P(A)}$$

или, с учетом формулы полной вероятности,

$$P(H_j/A) = \frac{P(H_j)P(A/H_j)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}.$$

- Эта формула называется **формулой Байеса**.

Пример 1.42. В цехе работает 20 станков, изготавливающих одинаковые детали:

- 10 станков — 1-го типа;
- 6 станков — 2-го типа;
- 4 станка — 3-го типа.

Вероятности того, что деталь окажется годной, для станков этих типов соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,7. Производительность всех типов станков одинакова.

1. Какова вероятность того, что наугад взятая деталь окажется годной?

2. Наугад взятая деталь оказалась годной. Какова вероятность того, что она изготовлена на станке 1-го типа?

Решение. Обозначим события:

A — наугад взятая деталь годная;

H_1 — наугад взятая деталь изготовлена на станке 1-го типа;

H_2 — наугад взятая деталь изготовлена на станке 2-го типа;

H_3 — наугад взятая деталь изготовлена на станке 3-го типа.

Так как производительность всех типов станков одинакова, то количество деталей, изготовленных на станках данного типа, пропорционально количеству станков. Поэтому

$$P(H_1) = \frac{10}{20} = 0,5; \quad P(H_2) = \frac{6}{20} = 0,3; \quad P(H_3) = \frac{4}{20} = 0,2.$$

Вероятности $P(A/H_i)$ даны в условии задачи:

$$P(A/H_1) = 0,9; \quad P(A/H_2) = 0,8; \quad P(A/H_3) = 0,7.$$

а) по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A/H_i) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \\ &+ P(H_3) \cdot P(A/H_3) = 0,5 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,83. \end{aligned}$$

б) по формуле Байеса получим ответ на второй вопрос

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,9}{0,83} = 0,54. \quad \blacktriangleright$$

1.5. Схема испытаний Бернулли. Приближенные формулы

Формула Бернулли

Пусть проводятся n независимых испытаний в одинаковых условиях, в результате которых может произойти событие A с одной и той же вероятностью $P(A) = p$ и не произойти с вероятностью $q = 1 - p$. Наступление события A называется **успехом**, а ненаступление — **неуспехом**. В этом случае говорят, что имеют место **повторные независимые испытания**. Такая схема называется последовательностью испытаний Бернулли или **схемой Бернулли**.

• Пусть X — число успехов в n испытаниях Бернулли. Тогда вероятность события $\{X = m\}$ (ровно m успехов в n испытаниях) вычисляется по формуле Бернулли

$$P_{m,n} = P_n(m) = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (1.1)$$

где $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$ — число сочетаний из n по m .

Указанную формулу легко получить, если разбить событие, состоящее в наступлении события A ровно m раз на частные случаи, отличающиеся совокупностью номеров тех испытаний, в которых наступает событие A . Всего таких частных случаев C_n^m , и все они равновозможные и несовместны. Для того чтобы найти вероятность каждого такого частного случая, нужно по теореме умножения вероятностей для n независимых событий перемножить m раз вероятность p (что A наступит) и $n - m$ раз вероятность q (что A не наступит).

Пример 1.43. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,05. Какова вероятность того, что среди купленных 10 билетов окажутся 2 выигрышных?

Решение. Требуется найти вероятность 2 успехов из 10 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0,05$. По формуле Бернулли (1.1) эта вероятность равна

$$P_{2, 10} = C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot q^8 = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^8 = 0,075. \blacktriangleright$$

Можно показать, что в n испытаниях Бернулли существует целое число $\bar{m}$, которому соответствует максимальное значение вероятности. Это число называется **наивероятнейшим** числом успехов.

• Наивероятнейшее число успехов $\bar{m}$ удовлетворяет двойному неравенству

$$(n+1)p - 1 \leq \bar{m} \leq (n+1)p$$

или

$$np - q \leq \bar{m} \leq np + p. \quad (1.2)$$

Может оказаться так, что в полученном интервале содержится несколько целых чисел. Тогда все они являются наивероятнейшими и имеют одинаковую вероятность — наибольшую среди всех значений m .

Пример 1.44. Всхожесть семян данного растения имеет вероятность 0,8. Найти наиболее вероятное число проросших семян из 5 посеянных.

Решение. По условию задачи $n = 5$, $p = 0,8$, следовательно, $q = 1 - 0,8 = 0,2$. Подставляя эти данные в формулу (1.2), получим

$$5 \cdot 0,8 - 0,2 \leq \bar{m} \leq 5 \cdot 0,8 + 0,8; \quad 3,8 \leq \bar{m} \leq 4,8.$$

Поэтому $\bar{m} = 4$. $\blacktriangleright$

Пример 1.45. Батарея дала 10 выстрелов по объекту, вероятность попадания в который при отдельном выстреле равна 0,4 и не зависит

от результатов предыдущих выстрелов. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.

Решение. По условию задачи $n = 10$, $p = 0,4$; $q = 1 - p = 0,6$. Подставляем эти значения в неравенство (1.2)

$$10 \cdot 0,4 - 0,6 \leq \bar{m} \leq 10 \cdot 0,4 + 0,4; \quad 3,4 \leq \bar{m} \leq 4,4;$$

тогда

$$\bar{m} = 4.$$

Вычислим вероятность этого числа попаданий:

$$P_{4, 10} = C_{10}^4 p^4 q^{10-4} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^6 = 0,25. \quad \blacktriangleright$$

Приближенные формулы

При больших значениях n и m пользоваться формулой Бернулли затруднительно. Одной из причин является сложность вычисления факториала большого числа в формуле числа сочетаний. Часто в этом случае используют **асимптотические** (приближенные) формулы для вычисления $P_{m, n}$. Одна из таких формул является следствием локальной теоремы Муавра — Лапласа (в некоторых книгах — теоремы Лапласа).

Локальная теорема Муавра — Лапласа

При больших n вероятность $P_{m, n}$ появления события A ровно m раз в схеме из n испытаний Бернулли можно вычислять по приближенной формуле, являющейся следствием локальной теоремы Муавра — Лапласа.

• *Теорема.* Если вероятность p наступления события A в отдельном испытании не равна нулю или единице, то вероятность $P_{m, n}$ наступления события A m раз в n повторных независимых испытаниях удовлетворяет следующему предельному равенству:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{npq} \cdot P_{m, n}}{\varphi(x)} = 1,$$

где функция Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ представлена в табличном виде (приложение 3) и в которой аргумент вычисляется по формуле $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Если x — отрицательное число, то при нахождении $\varphi(x)$ знак «минус» можно проигнорировать, так как x входит в формулу для $\varphi(x)$ только в квадрате.

Из локальной теоремы Муавра — Лапласа следует, что при достаточно больших n и значениях p , не слишком близких к нулю или единице,

$$\frac{\sqrt{npq} \cdot P_{m,n}}{\varphi(x)} \approx 1 \text{ и } P_{m,n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Пример 1.46. В первые классы должно быть принято 200 детей. Найти вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчиков равна 0,515.

Решение. В аналогичных задачах негласно предполагается, что вероятностью рождения близнецов можно пренебречь и что все родившиеся дети доживают до школьного возраста. Тогда этот случай можно рассматривать как повторные независимые испытания при $n = 200$; $m = 100$; $q = 0,515$ и $p = 1 - q = 0,485$.

Применяя следствие из локальной теоремы Муавра — Лапласа, имеем

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 200 \cdot 0,485}{\sqrt{200 \cdot 0,485 \cdot 0,515}} = \frac{3}{7,07} \approx 0,42.$$

По таблице (приложение 3) находим, что функция Гаусса $\varphi(0,42) = 0,3653$.

$$P_{m,n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{7,07} \cdot 0,3653 \approx 0,052. \quad \blacktriangleright$$

Пример 1.47. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна 0,25. Какова вероятность того, что среди 80 грибов белых будет 20?

Решение. По условию задачи $n = 80$, $m = 20$, $p = 0,25$. Тогда

$$x = \frac{20 - 80 \cdot 0,25}{\sqrt{80 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = 0.$$

По таблице (приложение 3) $\varphi(0) = 0,3989$. Таким образом,

$$P_{20,80} \approx \frac{1}{\sqrt{80 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \cdot \varphi(0) \approx 0,103. \quad \blacktriangleright$$

Наиболее точные результаты это следствие из локальной теоремы Лапласа дает при $n \geq 20$ и p в диапазоне $0,05 \leq p \leq 0,95$.

Если же p очень мало (меньше 0,05), то пользуются асимптотической формулой Пуассона.

Формула Пуассона

Если в схеме испытаний Бернулли число испытаний n велико, вероятность p события A в одном испытании мала, а произведение $\lambda = np$ не превосходит 20, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A появится ровно в m испытаниях, находится по приближенной формуле Пуассона:

$$P_{m,n} \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!},$$

где $\lambda = np$ — параметр Пуассона; $e \approx 2,72$ — одна из главных математических констант.

Значения $P_{m,n}$ имеются в таблицах распределения Пуассона (см. приложение 5).

Пример 1.48. В ходе проверки аудитор случайным образом отбирает 10 счетов. Найти вероятность того, что он обнаружит ровно один счет с ошибкой, если в среднем 3% счетов содержат ошибки.

Решение. По условию $n = 10$, $p = 0,03$, $\lambda = np = 0,3$, $m = 1$. Тогда

$$P_{1,10} \approx \frac{e^{-0,3} \cdot 0,3^1}{1!}.$$

По таблице значений распределения Пуассона (приложение 5) находим $P_{1,10} \approx 0,2223$. ►

Пример 1.49. В организации работают 730 человек. Найти вероятность того, что ровно у трех из них день рождения первого января. Принять вероятность рождения в фиксированный день равной $\frac{1}{365}$.

Решение. Нужно найти $P_{m,n}$ при $n = 730$; $m = 3$ и $p = \frac{1}{365}$. Так как n велико, а $p < 0,05$, то применяем формулу Пуассона. Для этого вычислим параметр Пуассона

$$\lambda = np = 730 \cdot \frac{1}{365} = 2.$$

По таблице (приложение 5) находим значение $P_{3,730}$ для $\lambda = 2$ и $m = 3$. Окончательно запишем

$$P_{3,730} = 0,1805. \quad \blacktriangleright$$

Интегральная теорема Муавра — Лапласа

Дадим упрощенную формулировку этой теоремы.

- Вероятность того, что число m появления события A в схеме Бернулли находится в заданном промежутке $a \leq$

$\leq m \leq b$, при большом числе испытаний n приблизительно равна

$$P(a \leq m \leq b) \approx \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}} \right) - \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} \right), \quad (1.3)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, значения которой находятся по таблицам (приложение 4).

Определение функции Лапласа представлено ниже.

Заметим, что для оценки частоты m/n появления события A в n испытаниях Бернулли можно использовать приближенную формулу

$$P \left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) \approx \Phi \left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}} \right), \quad (1.4)$$

где ε — некоторое положительное число.

Тогда число m появлений события A можно оценить по приближенной формуле

$$P(|m - np| \leq \varepsilon) \approx \Phi \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}} \right). \quad (1.5)$$

В расчетах необходимо иметь в виду, что функция Лапласа является нечетной функцией, т.е.

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Пример 1.50. Арбуз оказывается неспелым с вероятностью $q = 0,25$. Найти вероятность того, что в партии из 768 арбузов количество спелых арбузов будет находиться в пределах от 564 до 600.

Решение. Пусть m — случайное событие — количество спелых арбузов. Будем считать, что имеется $n = 768$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха p (зрелый арбуз), равной $1 - 0,25 = 0,75$. Если m — число успехов, то требуется найти вероятность $P(a \leq m \leq b)$ по формуле (1.3), где $a = 564$, $b = 600$.

Поскольку

$$\frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{600 - 768 \cdot 0,75}{\sqrt{768 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = \frac{24}{11,977} \approx 2,00;$$

$$\frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{564 - 576}{11,977} = -1,00,$$

тогда, пользуясь таблицей приложения 5, получим

$$\begin{aligned}
 P(564 \leq m \leq 600) &\approx \frac{1}{2}\Phi(2) - \frac{1}{2}\Phi(-1) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 0,9545 + \frac{1}{2} \cdot 0,6827 = 0,8186.
 \end{aligned}$$

Пример 1.51. Кандидата в высший орган власти поддерживает 80% населения. В каких пределах с вероятностью 0,95 находится число проголосовавших «за» на выборах, если число явившихся избирателей равно 1 200 000?

Решение. Обозначим $n = 1\,200\,000$, $p = 0,8$, $q = 0,2$.

По формуле (1.5) запишем

$$P(|m - np| \leq \varepsilon) = 0,95 = \Phi\left(\varepsilon / \sqrt{npq}\right).$$

По таблицам значений функций Лапласа (приложение 4) находим, что

$$\varepsilon / \sqrt{npq} = 1,96.$$

Тогда

$$\varepsilon = 1,96 \cdot \sqrt{npq} = 1,96 \cdot 438 \approx 859;$$

$$|m - np| = |m - 1\,200\,000 \cdot 0,8| \leq 859.$$

И наконец,

$$960\,000 - 859 \leq m \leq 960\,000 + 859,$$

или количество проголосовавших «за» будет лежать в диапазоне
 $959\,141 \leq m \leq 960\,859$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что называется экспериментом (опытом) и событием в теории вероятностей? Дайте определения и приведите примеры достоверного, невозможного и случайного событий.

2. Какие события называются равновероятными? Противоположными?

3. Какое событие называется суммой двух событий? Нескольких событий?

4. Какое событие называется произведением двух событий? Нескольких событий?

5. Какие события называются совместными и несовместными?

6. Когда говорят, что событие распадается на n частных случаев? Когда частные случаи образуют полную группу событий? Какие частные случаи называются элементарными исходами?

7. Что такое вероятность события? Сформулируйте классическое и статистическое определения вероятности.

8. В каких числовых пределах находятся значения вероятности любого события?

9. Каковы вероятности невозможного, достоверного, противоположного событий?

10. Поясните понятия: число перестановок, число размещений, число сочетаний. Запишите для них формулы вычислений.

11. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для двух совместных событий; для двух и нескольких несовместных событий.

12. Дайте определение условной вероятности события.

13. Какие события называются независимыми? Зависимыми?

14. Чему равны условные вероятности независимых событий?

15. Сформулируйте теорему умножения вероятностей для двух и трех зависимых событий; для двух и нескольких независимых событий.

16. Запишите формулу полной вероятности и объясните смысл входящих в нее вероятностей.

17. Получите формулу Байеса и объясните, когда она применяется.

18. Запишите формулу для вычисления $P_{m,n}$ — вероятности наступления события m раз при n повторных независимых испытаниях (формулу Бернулли).

19. Каким образом можно найти наименее вероятное число наступлений события в n повторных независимых испытаниях?

20. Сформулируйте локальную теорему Муавра — Лапласа (Лапласа) и объясните, как с ее помощью можно приближенно найти $P_{m,n}$ при больших значениях n .

21. Запишите формулу Пуассона и объясните, когда она применяется.

Задачи для самостоятельного решения

Задачи на комбинаторику

1. Сколькими способами колода в 52 карты может быть роздана 13 игрокам так, чтобы каждый игрок получил по одной карте каждой масти?

2. Сколькими способами можно расставить 10 книг на полке так, чтобы две определенные книги не стояли рядом?

3. Сколькими различными способами можно рассадить за круглым столом 10 гостей? Один способ отличается от другого, если у кого-то из гостей меняется хотя бы один сосед.

4. Имеется пять кусков материи разных цветов. Сколько различных флагов можно скроить из этих кусков, если каждый флаг состоит из трех горизонтальных полос разного цвета?

5. Каждая из n различных коммерческих организаций намеревается принять на работу одного из n выпускников коммерческого отделения факультета экономики. В каждой из этих организаций выпускнику предлагается на выбор одна из

k должностей. Сколько существует вариантов распределения этих n выпускников на работу?

6. Каждый участник лотереи «6 из 49» должен записать в специальной карточке 6 любых чисел от 1 до 49. При розыгрыше лотереи комиссия случайным образом отбирает 6 чисел из чисел 1, 2, ..., 49. Участник, правильно угадавший все 6 чисел, получает большой приз. Участник, угадавший лишь 5 чисел, получает малый приз. Участник, угадавший лишь 4 числа, получает поощрительный приз. Сколькими различными способами можно заполнить карточку, чтобы получить малый приз? Чтобы получить поощрительный приз?

7. У одного человека есть 7 книг, а у другого — 9 книг. Сколькими способами они могут обменять 3 книги одного на 3 книги другого?

8. Бригада строителей состоит из 16 штукатуров и 4 маляров. Сколькими способами бригаду можно разделить на две бригады, чтобы в одной из них было 10 штукатуров и 2 маляра, а в другой — 6 штукатуров и 2 маляра?

9. Из отряда солдат в 50 человек, среди которых есть два рядовых однофамильца Ивановых, назначают в караул 4 человек. Сколькими различными способами может быть составлен караул? В скольких случаях в карауле будут два Ивановых? В скольких случаях в карауле будет один Иванов? Хотя бы один Иванов?

10. Сколькими способами можно разложить 10 книг на 5 бандеролей по две книги в каждой (порядок бандеролей не принимается во внимание)?

11. У Деда Мороза в мешке 10 различных подарков. Сколькими способами эти подарки могут быть розданы 7 детям? Решить ту же задачу в предположении, что все подарки одинаковы.

12. Сколькими способами можно разложить 6 одинаковых шаров по трем ящикам, если каждый ящик может вместить все шары?

13. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?

14. Нужно провести 4 экзамена по различным дисциплинам в течение 20 дней. Сколько существует вариантов расписания экзаменов, если временной промежуток между экзаменами должен быть не меньше 3 дней?

15. Сколько можно составить различных семизначных телефонных номеров? Сколько будет номеров, у которых все цифры разные?

Задачи на вычисление вероятности

1. В экзаменационном билете 2 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9, а на второй — 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого надо ответить хотя бы на один вопрос.

2. В ящике 10 деталей, среди которых 7 окрашенных. Сборщик наугад достает 2 детали. Найти вероятность того, что хотя одна из них окрашенная.

3. На производственной практике группа из трех студентов с разным уровнем практической подготовки вытачивает детали. Первый студент выточил 50% деталей, второй — 40%, третий — 10%. Вероятность выточить бракованную деталь у первого студента 0,01, у второго — 0,02 и у третьего — 0,04. При сдаче деталей обнаружилась бракованная деталь. Подсчитав соответствующие вероятности, скажите, какой студент наиболее вероятно изготовил бракованную деталь.

4. Преподаватель может вызвать к доске с равной вероятностью любого из 20 студентов группы. На занятии он вызывает двух студентов. Какова вероятность того, что он сегодня не вызовет ни Иванова, ни Петрова, ни Сидорова?

5. Брошены 2 игральные кости. Какова вероятность того, что хотя бы на одной выпадет 5 очков?

6. В стрелковом тире тренируются 4 стрелка I разряда, 2 стрелка II разряда и 4 стрелка III разряда. Вероятность попадания в цель для стрелка I разряда равна 0,9, для стрелка II разряда — 0,85 и для стрелка III разряда — 0,75. Найти вероятность того, что наугад выбранный стрелок попадет в цель.

7. Студент успел подготовить к экзамену 30 вопросов из 40. Какова вероятность того, что он ответит на оба вопроса, содержащихся в билете?

8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 наугад выбираются 2 цифры. Найти вероятность того, что они обе будут нечетными.

9. Какова вероятность того, что при 8 бросаниях монеты герб выпадет ровно 5 раз?

10. Брошены 3 игральные кости. Какова вероятность того, что суммарное число очков больше 16?

11. Приняв вероятность рождения мальчика равной 0,515, найти вероятность того, что среди 10 новорожденных — 4 девочки. Считать вероятность рождения близнецов равной нулю.

12. Из партии деталей, в которой 31 деталь без дефектов и 6 — с дефектами, берут наудачу 2 детали. Найти вероятность того, что обе детали без дефектов.

13. Рабочий обслуживает 3 станка, на которых изготавливают одинаковые детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,05, для второго — 0,02 и для третьего — 0,01. Производительность первых двух станков одинакова, а производительность третьего — в 3 раза выше. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет бракованной.

14. Вероятность всхода семени равна 0,8. Найти вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдут не менее четырех.

15. Из колоды 36 карт вынимается карта, записывается, а затем возвращается в колоду и колода перемешивается. Найти

вероятность того, что из 7 вынутых таким образом карт будет ровно 3 туза.

16. В первом ящике находится 40 годных деталей и 10 бракованных, а во втором — 30 годных и 20 бракованных. Из каждого ящика наугад достают по одной детали. Найти вероятность того, что хоть одна из них бракованная.

17. На сельскохозяйственном предприятии имеется 3 молочные фермы, на которых соответственно 40, 35 и 25 коров. Вероятность того, что годовой удой коровы превысит 3000 л для 1-й фермы равна 0,4, для 2-й — 0,5 и для 3-й — 0,7:

а) найти вероятность того, что годовой удой наугад выбранной коровы превысит 3000 л;

б) годовой удой наугад выбранной коровы превышает 3000 л. Найти вероятность того, что эта корова с 3-й фермы.

18. Найти вероятность того, что число работников фирмы, празднующих день рождения в июне, составляет от 70 до 100 человек, если общая численность персонала фирмы 1000 человек. Принять, что в году 365 дней.

19. Произведено 3 выстрела по цели из орудия. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,5, при втором — 0,6, а при третьем — 0,75. Найти вероятность того, что хотя бы один выстрел попадет в цель.

20. Контролер ОТК, проверив качество сшитых 20 пальто, установил, что среди них 12 — первого сорта, а остальные — второго. Найти вероятность того, что из взятых наугад трех пальто не будет ни одного второсортного.

21. Контрольную работу по теории вероятностей с первого раза на положительную оценку пишут, в среднем, 80% студентов. Найти вероятность того, что из 100 студентов с первого раза контрольную на положительную оценку напишут от 75 до 90 студентов.

22. Мастер обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены не потребует наладки, равна 0,7, второй — 0,6 и третий — 0,5. Найти вероятность того, что в течение смены хотя бы один станок потребует наладки.

23. Вероятность поступления бракованной заготовки из литейного цеха равна 0,2. Найти вероятность того, что из 2500 поступивших заготовок число годных лежит в пределах от 1970 до 2010.

24. Рабочий обслуживает 3 станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Производительности станков равны соответственно 35, 10 и 5 деталей в час. Вероятность брака для первого станка равна 0,05, для второго — 0,02 и третьего — 0,01. Найти вероятность того, что:

а) наугад взятая деталь окажется бракованной;

б) наугад взятая деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена на первом станке.

25. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют автомобиль. Найти вероятность того, что из произвольно взятых в этой местности 400 семей автомобиль имеют от 310 до 332 семей.

26. В коробке 10 красных и 5 синих карандашей. Наугад вынимают 2 карандаша. Найти вероятность того, что они оба одного цвета.

27. Вероятность рождения девочки равна 0,485. Найти вероятность того, что число девочек среди 1000 новорожденных от 490 до 510.

Глава 2

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

После изучения главы 2 бакалавр должен:

знать

- дискретные и непрерывные случайные величины, а также их характеристики;

уметь

- вычислять значения характеристик случайных величин;
- строить графики функции и плотности распределения;

владеть

- методами обработки данных рядов распределений.
-

- **Случайной** называется величина, которая в зависимости от случая может принимать те или иные числовые значения с некоторой вероятностью. Будем обозначать случайные величины заглавными последними буквами латинского алфавита $X, Y, Z, X_1, X_2, \dots$, а принимаемые ими значения — соответствующими малыми буквами $x, y, z, x_1, x_2, \dots$.

Пример 2.1. Примеры случайных величин:

- количество деталей высокого качества, сошедших с конвейера в течение часа;
- результат измерения некоторой физической величины;
- число студентов группы, явившихся на занятие по математике;
- число зерен в случайно взятом пшеничном колосе и т.д. ►

Случайные величины делятся на **дискретные** и **непрерывные**.

2.1. Дискретные случайные величины

Дискретной называется случайная величина, которая может принимать лишь конечное или счетное число значений. Ограничимся рассмотрением только конечнозначных случайных величин. Чтобы задать такую случайную

величину, необходимо указать, какие значения она может принимать и как часто она принимает эти значения.

Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения** дискретной случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Чаще всего дискретную случайную величину X задают в виде табл. 2.1, в первой строке которой указывают возможные ее значения x_i (как правило, в возрастающем порядке), а во второй строке — вероятности, с которыми случайная величина X принимает эти значения. Эта таблица называется **рядом распределения** случайной величины X .

Таблица 2.1

Ряд распределения

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4	...	p_n

Для ряда распределения выполняется условие нормировки

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Если в прямоугольной системе координат по оси абсцисс отложить значения x_i , а по оси ординат — вероятности p_i и нанести точки с координатами (x_i, p_i) , а затем соединить соседние по абсциссе точки отрезками прямой, то получится ломаная линия, называемая **полигоном** (многоугольником) **распределения** случайной величины X (рис. 2.1).

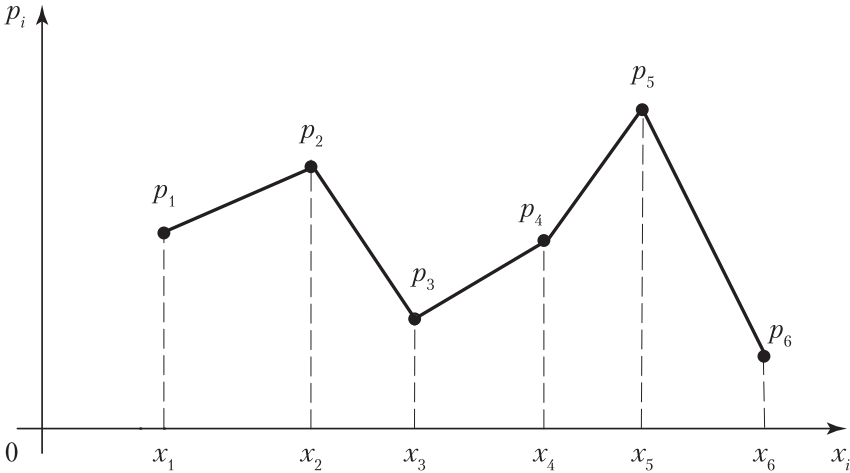


Рис. 2.1. Полигон распределения случайной величины

При этом сумма всех ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а следовательно, равна единице.

Пример 2.2. Всхожесть семян данного растения определяется вероятностью 0,6. Пусть X — случайная величина — число появившихся растений из 5 семян. Найти ряд распределения X . Вычислить вероятность, что вырастут три и более растения; вырастут не менее двух и не более четырех.

Решение. Из условия задачи ясно, что случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 и ее ряд распределения определяется вероятностями

$$P_m = P(X = m), m = 0, 1, \dots, 5.$$

Вычислим эти вероятности.

В задаче можно считать, что имеется схема испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0,6$. Тогда по формуле Бернулли

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

При $n = 5, p = 0,6, q = 0,4$ получим

$$p_{0,5} = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = \frac{5!}{5! \cdot 0!} 0,6^0 \cdot 0,4^5 = 0,01,$$

вероятность того, что не взойдет ни одно семя из пяти.

Аналогично вычисляем:

$p_{1,5} = 0,08$ — вероятность того, что возшло одно растение;

$p_{2,5} = 0,23; p_{3,5} = 0,35; p_{4,5} = 0,26; p_{5,5} = 0,08$.

Ряд распределения случайной величины X имеет вид

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,01	0,08	0,23	0,35	0,26	0,08

Из ряда распределения легко вычислить вероятность, что вырастут три и более растения

$$P(x_i \geq 3) = p_{3,5} + p_{4,5} + p_{5,5} = 0,35 + 0,26 + 0,08 = 0,69;$$

вырастут не менее двух и не более четырех

$$P(x_i \in [2; 4]) = p_{2,5} + p_{3,5} + p_{4,5} = 0,23 + 0,35 + 0,26 = 0,84. \quad \blacktriangleright$$

Рассмотрим примеры, в которых случайная величина Z является комбинацией двух случайных величин.

Две случайные величины X и Y называются **независимыми**, если события $X = x_i$ и $Y = y_j$ независимы для всех значений x_i и y_j соответственно. Это означает, что

$$P[(X = x_i) \cdot (Y = y_j)] = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j).$$

Пусть ряд распределения случайной величины X имеет вид

$$p_i = P(X = x_i),$$

а случайной величины Y —

$$q_j = P(Y = y_j).$$

Тогда можно ввести новые случайные величины.

- **Произведение постоянной** величины c на случайную величину X

$$Z = cX$$

есть также случайная величина, которая принимает значения cx_i с теми же самыми вероятностями, что и случайная величина X , принимающая значения x_i , т.е.

$$P(Z = cx_i) = p_i.$$

Ряд распределения случайной величины Z может быть записан в виде таблицы

z_i	cx_1	cx_2	...	cx_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

- **Сумма случайных величин** X и Y — это новая случайная величина,

$$Z = X + Y,$$

принимающая все значения вида $z_k = x_i + y_j$ с вероятностями

$$r_k = \sum_{i,j} (x_i + y_j = z_k) p_{ij} \text{ при } p_{ij} = P[(X = x_i) \cdot (Y = y_j)].$$

Если при этом случайные величины X и Y независимы, то

$$p_{ij} = P[(X = x_i) \cdot (Y = y_j)] = p_i \cdot q_j.$$

- **Разностью случайных величин** называется новая случайная величина

$$Z = X - Y,$$

для которой

$$r_k = P(Z = z_k) = \sum_{i,j} (x_i - y_j = z_k) p_{ij},$$

если при этом случайные величины X и Y независимы, то

$$p_{ij} = P[(X = x_i) \cdot (Y = y_j)] P[(X = x_i) \cdot (Y = y_j)] = p_i \cdot q_j.$$

Пример 2.3. Пусть случайные величины X и Y независимы и заданы рядами распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

y_j	-1	0	1
q_j	0,4	0,2	0,4

Найти ряд распределения случайной величины $Z = X - Y$.

Решение. По данным таблиц составим все возможные значения разности случайных величин $X - Y$: $0 - (-1) = 1$; $0 - 0 = 0$; $0 - 1 = -1$; $1 - (-1) = 2$; $1 - 0 = 1$; $1 - 1 = 0$ и т.д. Имеем множество значений разности $\{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Определим их вероятности.

$$P(Z = -1) = P[(X = 0) \cdot (Y = 1)] = p_{13} = p_1 \cdot q_3 = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08;$$

$$P(Z = 0) = P[(X = 0) \cdot (Y = 0)] + P[(X = 1) \cdot (Y = 1)] = \\ = p_{12} + p_{23} = 0,2 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,2;$$

$$P(Z = 1) = p_{11} + p_{22} + p_{33} = 0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,28;$$

$$P(Z = 2) = p_{21} + p_{32} + p_{43} = 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,4 = 0,26;$$

$$P(Z = 3) = p_{31} + p_{42} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,14;$$

$$P(Z = 4) = p_{41} = 0,04.$$

Таким образом, ряд распределения случайной величины Z задается таблицей

z_k	-1	0	1	2	3	4
r_k	0,08	0,2	0,28	0,26	0,14	0,04



• **Произведением случайных величин** называется новая случайная величина $Z = XY$, принимающая все значения вида $z_k = x_i y_j$ с вероятностями

$$r_k = \sum_{i,j} (x_i \cdot y_j = z_k) p_{ij},$$

где $p_{ij} = P[(X = x_i) \cdot (Y = y_j)] = p_i \cdot q_j$ для независимых X и Y .

Построить ряд распределения случайной величины во многих случаях довольно сложно, да и не всегда это нужно. Для решения многих задач достаточно знать числовые характеристики дискретных случайных величин.

К основным характеристикам относятся: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

Кроме указанных характеристик в теории вероятностей применяются еще числовые характеристики, отражающие те или иные особенности распределения случайной величины, например, мода, медиана, моменты, коэффициент асимметрии, эксцесс. Рассмотрим их.

• **Математическим ожиданием** MX дискретной случайной величины X называется сумма

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

и имеет смысл среднего значения случайной величины. Значения x_i, p_i берутся из ряда распределения.

Если число значений случайной величины конечно и равно n , а вероятности $p_n = \frac{1}{n}$, то MX совпадает с обычным средним значением величин $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда

$$MX = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + x_n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами.

1. $MC = C$, где $C = \text{const}$.
2. $M(CX) = C \cdot MX$, где $C = \text{const}$.
3. $M(X \pm Y) = MX \pm MY$, для любых X и Y .
4. $M(XY) = MX \cdot MY$, если X и Y независимы.

Две или несколько случайных величин называются **независимыми**, если вероятности принятия каких-либо значений каждой из них не зависят от того, какие значения приняли остальные случайные величины.

5. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю

$$M(X - MX) = 0.$$

Последнее свойство не позволяет использовать среднее отклонение случайной величины от ее математического ожидания в качестве характеристики ее среднего разброса вокруг среднего значения, так как положительные отклонения (со знаком «+») при усреднении отклонений компенсируются отрицательными отклонениями (со знаком «-»).

Ясно, что характеристика среднего разброса значений случайной величины должна быть положительным числом, которое тем больше, чем шире по числовой оси рассеяние

основной массы значений случайной величины. В частности, эту роль могло бы выполнить математическое ожидание абсолютной величины отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т.е. $M|X - MX|$.

Для оценки степени рассеивания значений случайной величины вокруг ее среднего значения вводится понятие дисперсии, которая является характеристикой разброса этих значений.

• **Дисперсией** DX называется математическое ожидание квадрата разности $X - MX$

$$DX = M(X - MX)^2.$$

Для дискретной случайной величины

$$DX = \sum_{i=1}^n (x_i - MX)^2 p_i.$$

Пример 2.4. Пусть закон распределения случайной величины имеет вид

X	0	1	2
p	0,0625	0,375	0,5625

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решение. Математическое ожидание случайной величины равно

$$MX = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,5625 = 1,5.$$

Возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1 - MX]^2 = (0 - 1,5)^2 = 2,25;$$

$$[x_2 - MX]^2 = (1 - 1,5)^2 = 0,25;$$

$$[x_3 - MX]^2 = (2 - 1,5)^2 = 0,25.$$

Тогда

$[X - MX]^2$	2,25	0,25	0,25
p	0,0625	0,375	0,5625

Дисперсия равна

$$DX = 2,25 \cdot 0,0625 + 0,25 \cdot 0,375 + 0,25 \cdot 0,5625 = 0,375. \quad \blacktriangleright$$

Однако на практике подобный способ вычисления дисперсии неудобен, так как при большом количестве

значений случайной величины приводит к громоздким вычислениям.

Поэтому на практике для вычисления дисперсии обычно используют более удобную формулу

$$DX = MX^2 - (MX)^2,$$

где $MX^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$.

Свойства дисперсии.

1. $DC = 0$, где $C = \text{const}$.
2. $D(CX) = C^2 DX$, где $C = \text{const}$.
3. $D(X \pm Y) = DX + DY$, если X и Y независимы.

Основным недостатком дисперсии как характеристики разброса значений случайной величины является то, что ее размерность не совпадает с размерностью самой случайной величины. Поэтому используют еще одну характеристику разброса значений случайной величины X вокруг среднего значения — среднее квадратическое отклонение.

- **Средним квадратическим отклонением** называется величина

$$\sigma X = \sqrt{DX},$$

которая также является мерой рассеивания значений случайной величины X .

- **Мода MoX** случайной величины X — это ее наиболее вероятное значение (для которого вероятность p достигает максимума). Если многоугольник распределения для дискретной случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется **полимодальным**.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется **антимодальным**.

- **Медианой MeX** случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины; для нее выполняется равенство

$$P(X < MeX) = P(X > MeX) = \frac{1}{2}.$$

Геометрически медиана — абсцисса точки, в которой площадь многоугольника распределения делится пополам.

Другими характеристиками случайной величины являются **начальные** и **центральные** моменты.

- **Начальным моментом** порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k .

$$\alpha_k = MX^k.$$

Для дискретной случайной величины эта формула имеет вид

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i.$$

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию случайной величины X .

- **Центральным моментом** порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - MX)^k$, т.е.

$$\mu_k = M(X - MX)^k.$$

На практике центральный момент дискретной случайной величины вычисляют по формуле

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - MX)^k p_i.$$

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю, а центральный момент второго порядка равен дисперсии. Центральный момент третьего порядка характеризует асимметрию распределения.

В частности, для 2-го центрального момента справедливо соотношение

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2.$$

Кроме рассмотренных выше величин для анализа случайных величин используются также так называемые абсолютные моменты:

- **абсолютный начальный момент:** $\beta_k = M|X|^k$;
- **абсолютный центральный момент:** $\nu_k = M|X - m_x|^k$.
- Абсолютный центральный момент первого порядка называется **средним арифметическим отклонением**.

Пример 2.5. Пусть задан ряд распределения случайной величины X

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,01	0,08	0,23	0,34	0,26	0,08

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

Решение. Вычислим математическое ожидание

$$MX = 0 \cdot 0,01 + 1 \cdot 0,08 + 2 \cdot 0,23 + 3 \cdot 0,34 + 4 \cdot 0,26 + 5 \cdot 0,08 = 3.$$

Для вычисления дисперсии сначала найдем

$$MX^2 = 0^2 \cdot 0,01 + 1^2 \cdot 0,08 + 2^2 \cdot 0,23 + 3^2 \cdot 0,34 + 4^2 \cdot 0,26 + 5^2 \cdot 0,08 = 10,22.$$

По формуле находим

$$DX = 10,22 - 9 = 1,22.$$

$$\text{Тогда } \sigma X = \sqrt{1,22} \approx 1,1.$$



Функция распределения

Во всех рассмотренных выше примерах случайная величина определялась путем табличного задания значений самой величины и вероятностей этих значений.

Однако такой метод применим далеко не всегда. Например, в случае непрерывной случайной величины, когда ее значения могут заполнять некоторый произвольный интервал. Очевидно, что в этом случае задать все значения случайной величины просто нереально.

Функция распределения является универсальным способом задания как непрерывных, так и дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

• **Функция распределения $F(x)$** представляет собой вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем x , т.е.

$$F(x) = P(X < x),$$

где P означает вероятность, а x — любое действительное число.

Таким образом, для любой случайной величины функция распределения $F(x)$ — это функция одной переменной x , областью определения которой является вся действительная ось от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 2.2).

Функцию распределения также называют **интегральной функцией**.

Для дискретной случайной величины X функция распределения $F(x)$ может быть определена равенством

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i.$$

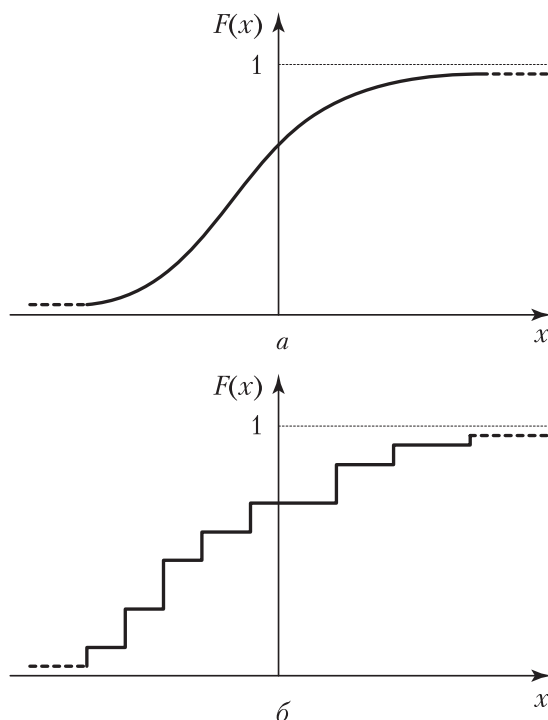


Рис. 2.2. Вид функции распределения случайных величин:
 a — непрерывной; $б$ — дискретной

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что для нахождения $F(x)$ дискретной случайной величины нужно сложить вероятности, соответствующие тем значениям x_i , которые меньше заданного значения x .

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i .

Если, к примеру, дискретная случайная величина X принимает четыре значения x_1, x_2, x_3, x_4 в возрастающем порядке с вероятностями соответственно p_1, p_2, p_3, p_4 , то функцию распределения этой случайной величины X можно записать следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1; \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3; \\ p_1 + p_2 + p_3, & x_3 < x \leq x_4; \\ 1, & x_4 < x. \end{cases}$$

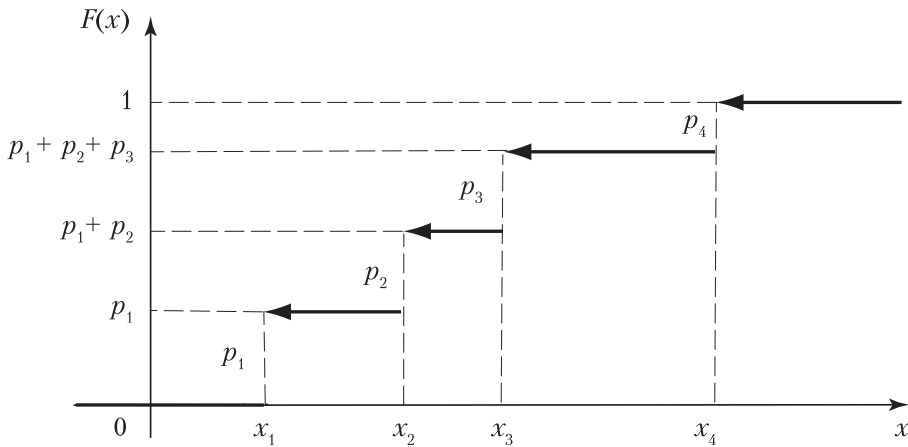


Рис. 2.3. Функция распределения дискретной случайной величины

График функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины представляет собой прерывистую ступенчатую линию, которая проходит горизонтально на каждом интервале, не содержащем значений x_i , и делает скачки, равные по величине p_i , в точках x_i (рис. 2.3).

Функция распределения имеет следующие свойства.

1. Так как $F(x)$ представляет собой вероятность, то значения функции лежат в диапазоне $0 \leq F(x) \leq 1$.

2. $F(x)$ — монотонно неубывающая функция на всей числовой оси, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$.

3. Функция распределения непрерывна слева (на рис. 2.3 данное обстоятельство показано стрелочкой).

4. Зная $F(x)$, легко определить вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $[x_1, x_2)$ по формуле

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

5. В бесконечности $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Заметим, что значение функции распределения в точке медианы равно $F(\text{Me}X) = \frac{1}{2}$.

Пример 2.6. Партия изделий содержит 10% нестандартных деталей. Из партии наугад выбираются 5 изделий. Построить ряд распределения случайной величины, равной числу стандартных изделий среди выбранных.

Найти функцию распределения этой случайной величины и вероятность, что будет выбрано более одного стандартного изделия.

Решение. Пусть X — случайная величина, равная числу стандартных среди 5 наугад взятых изделий. Следовательно, нужно найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и вероятность $P(X > 1)$. Заметим, что случайная величина X может принимать значения $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Найдем их вероятности по формуле Бернулли

$$p_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } n = 5, p = 0,9, q = 0,1.$$

Вычислив вероятности, получим: $p_{0,5} = 0,00001$; $p_{1,5} = 0,00045$; $p_{2,5} = 0,0081$; $p_{3,5} = 0,0729$; $p_{4,5} = 0,32805$; $p_{5,5} = 0,59049$.

Построим ряд распределения

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00001	0,00045	0,0081	0,0729	0,32805	0,59049

По определению функции распределения

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i.$$

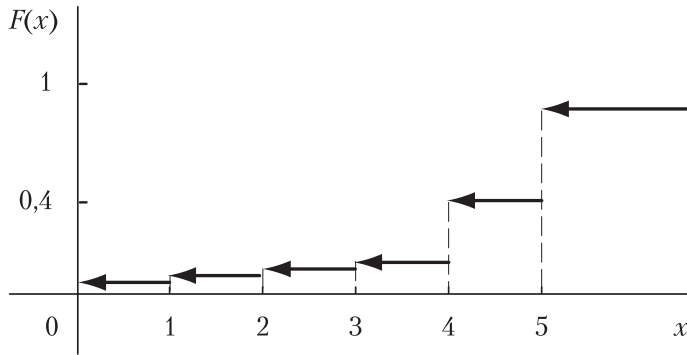
Из ряда распределения очевидно, что:

- при $x \leq 0$ $F(x) = 0$;
 при $0 < x \leq 1$ $F(x) = p_0 = 0,00001$;
 при $1 < x \leq 2$ $F(x) = p_0 + p_1 = 0,00046$;
 при $2 < x \leq 3$ $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 = 0,00856$;
 при $3 < x \leq 4$ $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0,08146$;
 при $4 < x \leq 5$ $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,40951$;
 при $x > 5$ $F(x) = 1$.

Перепишем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,00001, & 0 < x \leq 1; \\ 0,00046, & 1 < x \leq 2; \\ 0,00856, & 2 < x \leq 3; \\ 0,08146, & 3 < x \leq 4; \\ 0,40951, & 4 < x \leq 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

По таблице распределения построим график функции распределения $F(x)$:



Тогда искомая вероятность

$$P(X > 1) = 1 - (P_{0,5} + P_{1,5}) = 1 - 0,00046 = 0,99954. \quad \blacktriangleright$$

Пример 2.7. Из партии 20 изделий, среди которых 6 бракованных, случайным образом выбраны 2 изделия. Построить ряд распределения, полигон распределения, $F(x)$ и ее график для случайной величины X , представляющей собой число бракованных деталей среди выбранных.

Решение. Среди двух выбранных деталей могут быть только 0, 1 или 2 бракованные детали. Тогда случайная величина X может принимать только эти три значения. Обозначим эти значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, а соответствующие им вероятности p_1, p_2, p_3 .

Обозначим события:

A — первая выбранная деталь бракованная;

B — вторая выбранная деталь бракованная.

Тогда событие $\bar{A}\bar{B}$ означает, что ни одна деталь не является бракованной. Следовательно, его вероятность будет равна

$$p_1 = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B} / \bar{A}) = \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} = 0,48.$$

Событие $A\bar{B} + \bar{A}B$ означает, что первая деталь бракованная, а вторая — небракованная $A\bar{B}$ или первая небракованная, а вторая — бракованная $\bar{A}B$. Тогда, учитывая, что события $A\bar{B}$ и $\bar{A}B$ являются несовместными, получим

$$\begin{aligned} p_2 = P(A\bar{B} + \bar{A}B) &= P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A) \cdot P(\bar{B} / A) + P(\bar{A}) \cdot P(B / \bar{A}) = \\ &= \frac{6}{20} \cdot \frac{14}{19} + \frac{14}{20} \cdot \frac{6}{19} = 0,44. \end{aligned}$$

И наконец, для события AB , что обе детали бракованные, вычислим

$$p_3 = P(AB) = P(A) \cdot P(B / A) = \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = 0,08.$$

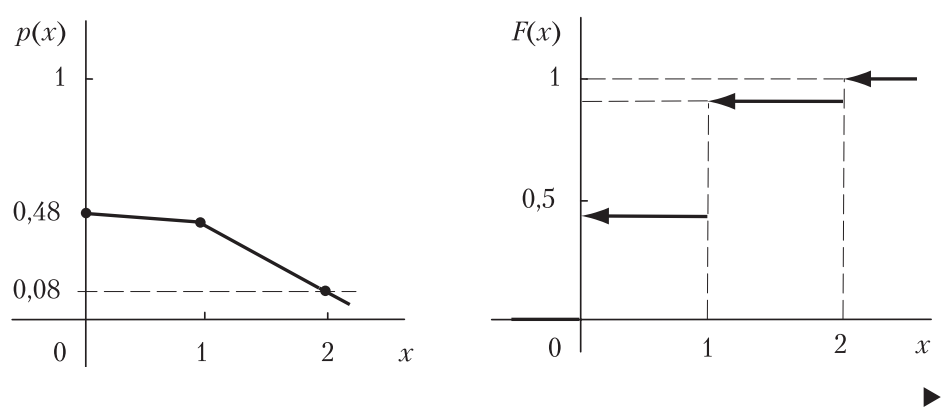
По результатам расчетов запишем ряд распределения случайной величины X

x_i	0	1	2
p_i	0,48	0,44	0,08

Аналогично предыдущему примеру по ряду распределения вычислим функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,48, & 0 < x \leq 1; \\ 0,92, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

По полученному ряду распределения и функции распределения построим полигон распределения (слева) и график функции распределения (справа):



Пример 2.8. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	2	4	7	8	10
p_i	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Найти MX , DX , σX , а также $M(2X + 1)$ и $D(2X + 1)$.

Решение. Из таблицы вычисляем математическое ожидание

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{i=1}^n x_i p_i = 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,4 + 7 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,1 = \\ &= 0,2 + 1,6 + 1,4 + 1,6 + 1 = 5,8. \end{aligned}$$

Дисперсию DX найдем двумя способами.

1. По определению дисперсии:

$$\begin{aligned} DX &= \sum_{i=1}^n (x_i - MX)^2 p_i = (2 - 5,8)^2 \cdot 0,1 + (4 - 5,8)^2 \cdot 0,4 + \\ &+ (7 - 5,8)^2 \cdot 0,2 + (8 - 5,8)^2 \cdot 0,2 + (10 - 5,8)^2 \cdot 0,1 = \\ &= 1,444 + 1,296 + 0,288 + 0,968 + 1,764 = 5,76. \end{aligned}$$

2. По упрощенной формуле:

$$MX^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = 2^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,4 + 7^2 \cdot 0,2 + 8^2 \cdot 0,2 + 10^2 \cdot 0,1 = \\ = 0,4 + 6,4 + 9,8 + 12,8 + 10 = 39,4;$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 39,4 - 5,8^2 = 39,4 - 33,64 = 5,76.$$

Тогда среднее квадратическое отклонение

$$\sigma X = \sqrt{DX} = \sqrt{5,76} = 2,4;$$

$$M(2X + 1) = M(2X) + M(1) = 2MX + M(1) = 2 \cdot 5,8 + 1 = 12,6;$$

$$D(2X + 1) = D(2X) + D(1) = 4DX + 0 = 4 \cdot 5,76 = 23,04. \quad \blacktriangleright$$

Пример 2.9. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из нее пять раз подряд извлекают шар, причем каждый раз вынутый шар возвращают обратно и шары перемешивают. Приняв за случайную величину X число извлеченных белых шаров, составить ряд распределения этой величины, определить ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Так как шары в каждом опыте возвращаются обратно и перемешиваются, то испытания можно считать независимыми (результат предыдущего опыта не влияет на вероятность появления или отсутствия события в другом опыте).

Таким образом, вероятность появления белого шара в каждом опыте постоянна и равна $p = \frac{6}{10} = 0,6$.

В результате пяти последовательных испытаний белый шар может не появиться вовсе, появиться один раз, два, три, четыре или пять раз.

Для составления ряда распределения надо найти вероятности каждого из этих событий.

1. Белый шар не появился вовсе: $p_{0,5} = (1-p)^5 \approx 0,01$.

2. Белый шар появился один раз:

$$p_{1,5} = C_5^1 p^1 (1-p)^4 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} 0,6 \cdot 0,4^4 \approx 0,07.$$

3. Белый шар появился два раза: $p_{2,5} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} 0,6^2 \cdot 0,4^3 \approx 0,23$.

4. Белый шар появился три раза: $p_{3,5} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} 0,6^3 \cdot 0,4^2 \approx 0,35$.

5. Белый шар появился четыре раза:

$$p_{4,5} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} 0,6^4 \cdot 0,4^1 \approx 0,26.$$

6. Белый шар появился пять раз: $p_{5,5} = 0,6^5 \approx 0,08$.

Получаем следующий ряд распределения случайной величины X

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,01	0,07	0,23	0,35	0,26	0,08

Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

$$MX = 0,07 + 2 \cdot 0,23 + 3 \cdot 0,35 + 4 \cdot 0,26 + 5 \cdot 0,08 = 3,0.$$

$$MX^2 = 0,07 + 2^2 \cdot 0,23 + 3^2 \cdot 0,35 + 4^2 \cdot 0,26 + 5^2 \cdot 0,08 = 10,2.$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 10,2 - 9 = 1,2. \quad \blacktriangleright$$

2.2. Непрерывные случайные величины

- **Непрерывной** называется случайная величина X , которая может принимать любые значения на всей числовой оси или на некотором ее промежутке.
- **Распределением** непрерывной случайной величины называется совокупность вероятностей $P(a \leq X \leq b)$ для любых действительных чисел a и b .
- **Функция распределения** непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной, т.е.

$$F(x) = P(X \leq x).$$

На рис. 2.4 представлен примерный график функции распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины.

Заметим, что для других видов распределений вид графика функции $F(x)$ может быть другим.

Распределение непрерывной случайной величины однозначно определяется ее функцией распределения $F(x)$, так как

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю. Действительно

$$P(a \leq X \leq a) = F(a) - F(a) = 0.$$

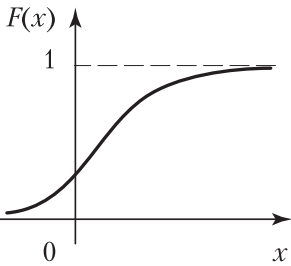


Рис. 2.4. Функция распределения

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком-либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой-либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

Все свойства функций распределения дискретных случайных величин выполняются и для функций распределения непрерывных случайных величин.

- Производная функции распределения

$$f(x) = F'(x)$$

называется **плотностью распределения** непрерывной случайной величины X .

Так как $F(x)$ — монотонно неубывающая функция, то ее производная $f(x)$ не может принимать отрицательные значения. То есть

$$f(x) \geq 0$$

для любого x и для любой случайной величины X .

- График плотности распределения $f(x)$ называется **кривой распределения** непрерывной случайной величины X (рис. 2.5).

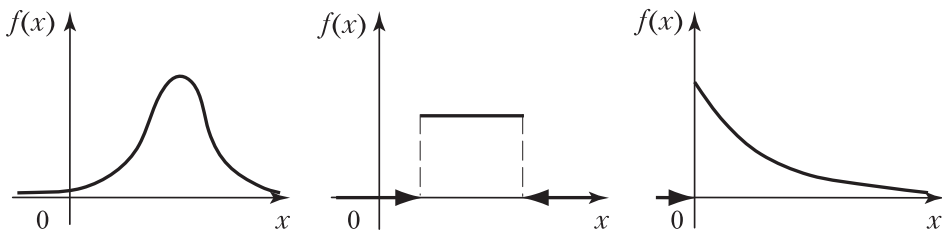


Рис. 2.5. Кривые распределения

Свойства плотности и кривой распределения.

1. Кривая распределения полностью лежит в верхней полуплоскости, включая ось x , т.е. $f(x) \geq 0$.

2. Площадь, заключенная между кривой распределения и осью абсцисс, равна единице, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

3. Вероятность попадания случайной величины X в промежуток от x_1 до x_2 равна площади фигуры, ограниченной

кривой распределения, осью x и прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$ (рис. 2.6).

$$P(x_1 < X < x_2) = S = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

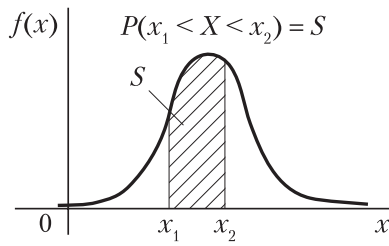


Рис. 2.6. Вероятность попадания на отрезок

$$4. F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Пример 2.10. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ (x-2)^2, & 2 \leq x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Построить график $F(x)$. Найти $f(x)$ и построить кривую распределения. Найти вероятность того, что случайная величина X попадет в промежуток:

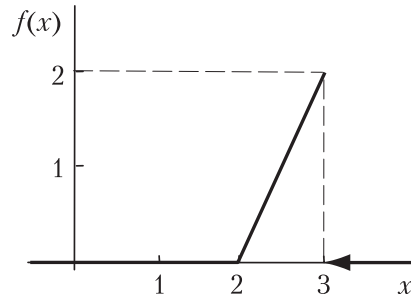
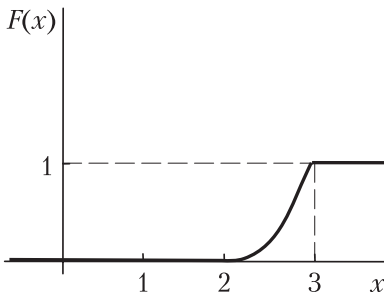
а) от 2,2 до 2,8;

б) от 2,5 до 3,5.

Решение. Так как $f(x) = F'(x)$, то, найдя производную, получим

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ 2 \cdot (x-2), & 2 \leq x \leq 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

В соответствии с формулами строим графики $F(x)$ и $f(x)$.



$$\text{а) } P(2,2 < X < 2,8) = F(2,8) - F(2,2) = (2,8 - 2)^2 - (2,2 - 2)^2 = 0,64 - 0,04 = 0,6;$$

$$\text{б) } P(2,5 < X < 3,5) = F(3,5) - F(2,5) = 1 - (2,5 - 2)^2 = 1 - 0,25 = 0,75. \quad \blacktriangleright$$

- **Математическое ожидание** MX непрерывной случайной величины, имеющей плотность распределения $f(x)$, определяется формулой

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

а **дисперсия** — выражением

$$DX = M(X - MX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx.$$

Для вычисления дисперсии также верна формула

$$DX = MX^2 - (MX)^2,$$

где $MX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$

или $DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (MX)^2.$

- **Среднее квадратическое отклонение** так же, как для дискретной случайной величины, определяется по формуле $\sigma X = \sqrt{DX}$.

Все свойства математического ожидания и дисперсии для дискретных случайных величин сохраняют силу и в непрерывных случайных величинах.

Мода и медиана для непрерывных случайных величин показаны на рис. 2.7. Как очевидно из рисунка, мода MoX — такое значение случайной величины, при котором плотность распределения имеет максимум

$$f(MoX) = \max.$$

Если кривая распределения непрерывной случайной величины имеет два или несколько максимумов, распределение называется **двухмодальным** или **многомодальным (полимодальным)**.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется **антимодальным**.

Геометрически вертикальная прямая $x = MeX$ делит площадь под кривой распределения случайной величины X на две равные части, а мода MoX показывает максимальное значение функции $f(x)$ (см. рис. 2.7).

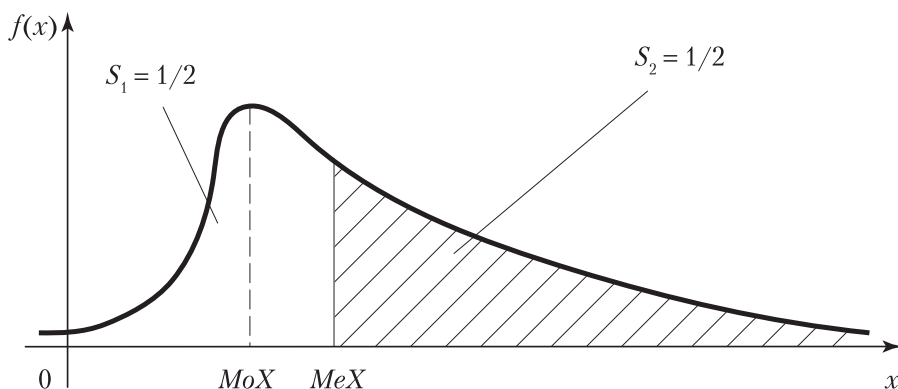


Рис. 2.7. Мода и медиана непрерывной случайной величины

- **Начальный момент** порядка k непрерывной случайной величины X вычисляется по формуле

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

- **Центральный момент** порядка k непрерывной случайной величины оценивается формулой

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^k f(x) dx.$$

В качестве характеристики асимметрии распределения чаще всего используется величина, которая называется **коэффициентом асимметрии**, или просто **асимметрией**.

- Отношение центрального момента третьего порядка к среднему квадратическому отклонению в третьей степени называется **коэффициентом асимметрии**

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то асимметрия, как и все центральные моменты нечетного порядка, равна нулю.

- Для характеристики островершинности (плосковершинности) распределения используется величина, называемая **эксцессом**

$$C = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Заметим, что для нормального распределения случайной величины, которое будет описано ниже, $C = 0$. Кривые, более островершинные по сравнению с нормальной, обладают положительным эксцессом, а более плосковершинные кривые — отрицательным эксцессом.

Определения и свойства числовых характеристик, абсолютные моменты непрерывных случайных величин аналогичны характеристикам дискретных случайных величин.

Пример 2.11. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ C \sin x, & 0 < x \leq \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

При каком значении C эта функция является плотностью распределения случайной величины X ? Построить функцию распределения $F(x)$, а также графики $f(x)$ и $F(x)$. Найти MX , DX , σX .

Решение. Для любой случайной величины X выполняется равенство $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Найдем выражение этого интеграла для заданной функции $f(x)$ и приравняем его к единице.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{+\infty} f(x)dx = 0 + \int_0^{\pi} f(x)dx + 0 = \\ &= \int_0^{\pi} C \sin x dx = C \int_0^{\pi} \sin x dx = -C \cos x \Big|_0^{\pi} = -C \cos \pi - (-C \cos 0) = 2C. \end{aligned}$$

$$2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Из свойства плотности распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Так как по условию задачи на промежутке $x < 0$ плотность распределения $f(x) = 0$, то на всем этом промежутке $F(x) = 0$.

Рассмотрим промежуток $0 \leq x < \pi$.

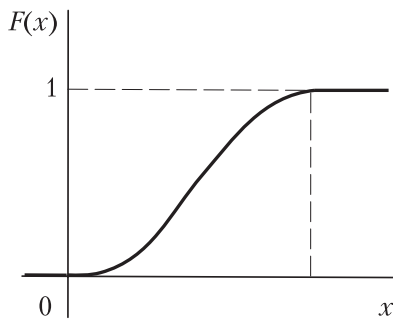
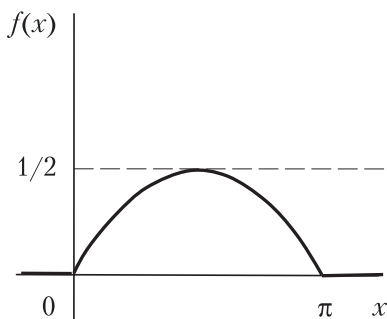
$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2} \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t \Big|_0^x = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x.$$

Подставив в полученную формулу $x = \pi$, получаем, что $F(\pi) = 1$. Из того, что $F(x)$ является неубывающей функцией, следует, что при $x > \pi$ выполняется неравенство $F(\pi) \geq 1$, а из того, что $F(x)$ представляет собой вероятность, следует, что $F(\pi) \leq 1$. Поэтому $F(x) = 1$ при $x > \pi$.

Получаем следующее выражение для $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x, & 0 < x \leq \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Строим графики $f(x)$ и $F(x)$.



$$\begin{aligned} MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^0 xf(x)dx + \int_0^{\pi} xf(x)dx + \int_{\pi}^{+\infty} xf(x)dx = \\ &= 0 + \int_0^{\pi} xf(x)dx + 0 = \int_0^{\pi} x \cdot \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \sin x dx = \begin{cases} u = x; \\ dv = \sin x dx; \\ du = dx; \\ v = -\cos x. \end{cases} \\ &= -\frac{1}{2} x \cos x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (-\cos x) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \pi \cos \pi + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \cos 0 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos x dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Дисперсию случайной величины X найдем по упрощенному правилу.

$$MX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\pi} x^2 f(x) dx = \int_0^{\pi} x^2 \cdot \frac{1}{2} \sin x dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \frac{1}{2} \left(-x^2 \cos x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) 2x dx \right) = \left. \begin{array}{l} u = x^2; \\ dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \\ v = -\cos x. \end{array} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \pi^2 \cos \pi + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \cos 0 + \int_0^{\pi} x \cos x dx = \\
&= \frac{\pi^2}{2} + x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{\pi^2}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi} = \\
&= \frac{\pi^2}{2} + \cos \pi - \cos 0 = \frac{\pi^2}{2} - 2. \quad \left. \begin{array}{l} u = x; \\ dv = \cos x dx; \\ du = dx; \\ v = \sin x. \end{array} \right\} \\
DX = MX^2 - (MX)^2 = \frac{\pi^2}{2} - 2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0,5. \\
\sigma X = \sqrt{DX} = \sqrt{0,5} \approx 0,7. \quad \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что называется случайной величиной? Приведите примеры случайных величин.

2. Какие случайные величины называются дискретными, а какие непрерывными?

3. Опишите табличную форму задания дискретной случайной величины (ряд распределения) и ее графическую интерпретацию (полигон распределения).

4. Дайте определение функции распределения случайной величины. Напишите формулу для построения функции распределения дискретной случайной величины. Изобразите примерный график функции распределения.

5. Сформулируйте основные свойства функции распределения.

6. Изобразите примерный график функции распределения непрерывной случайной величины. Дайте определение плотности распределения.

7. Что называется кривой распределения? Сформулируйте ее основные свойства. Как на основе кривой распределения найти вероятность попадания случайной величины в заданный промежуток?

8. Дайте определение математического ожидания случайной величины.

9. Запишите формулы для вычисления математического ожидания дискретной и непрерывной случайных величин.

10. Сформулируйте основные свойства математического ожидания.

11. Что показывает дисперсия случайной величины? Дайте определение дисперсии и сформулируйте ее основные свойства.

12. В чем заключается основной недостаток дисперсии в качестве характеристики разброса (рассеяния) значений случайной величины?

13. Дайте определение среднего квадратического отклонения случайной величины.

14. Поясните понятия: момент, коэффициент асимметрии, эксцесс.

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения. Построить графики функции распределения и плотности распределения, если

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

2. Дан ряд распределения случайной величины X

x_i	0,2	0,5	0,6	0,8
p_i	0,1	0,5	0,2	0,2

Построить функцию распределения $F(X)$ и ее график. Найти MX , DX , σX .

3. Дан ряд распределения случайной величины X

x_i	4	6	8	10
p_i	0,3	0,2	0,4	0,1

Построить функцию распределения $F(X)$ и ее график. Найти MX , DX , σX .

4. Дан ряд распределения случайной величины X

x_i	-6	-2	1	4
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Построить функцию распределения $F(X)$ и ее график. Найти MX , DX , σX .

5. Дан ряд распределения случайной величины X

x_i	2	5	6	8
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

Построить функцию распределения $F(X)$ и ее график. Найти MX , DX , σX .

6. Дан ряд распределения случайной величины X

x_i	4	6	8	12
p_i	0,3	0,1	0,3	0,3

Построить функцию распределения $F(X)$ и ее график. Найти MX , DX , σX .

7. Дан ряд распределения случайной величины X

x_i	3	6	7	9
p_i	0,3	0,2	0,1	0,4

Построить функцию распределения $F(X)$ и ее график. Найти MX , DX , σX .

8. Случайная величина X задана следующим рядом распределения:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Построить функцию распределения $F(X)$ и ее график. Найти MX , DX , σX .

9. Дан ряд распределения случайной величины X

x_i	1	3	4	5
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Построить функцию распределения $F(X)$ и ее график. Найти MX , DX , σX .

Глава 3

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

После изучения главы 3 бакалавр должен:

знать

- основные законы распределения и их характеристики;

уметь

- использовать законы распределения при анализе конкретных задач;

владеть

- методами обработки опытных данных.
-

При исследовании случайных величин, как правило, функция их распределения $F(x)$ является неизвестной. Однако анализ характера распределения значений случайной величины во многих случаях позволяет подобрать стандартный вид функции распределения, или, как говорят, закона распределения. Разработан целый класс таких функций, позволяющих аппроксимировать (описать приближенно) исследуемые случайные величины. Рассмотрим их.

3.1. Биномиальное распределение

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одинаковой вероятностью p , то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину X . Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

Очевидно, что в результате n испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до n раз.

- Вероятность каждого значения дискретной случайной величины можно найти по формуле Бернулли

$$p_{m,n} = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Такой закон распределения называется **биномиальным** законом с параметрами p и q .

Заметим, что сумма вероятностей

$$\sum_{m=0}^n p_{m,n} = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = (p + q)^n = 1.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X :

$$MX = np, \quad DX = npq.$$

Среднее квадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии

$$\sigma X = \sqrt{DX} = \sqrt{npq}.$$

Пример 3.1. В партии 10% бракованных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Построить ряд распределения дискретной случайной величины X — числа бракованных деталей среди четырех отобранных. Построить многоугольник полученного распределения.

Решение. По условию вероятность появления бракованной детали равна 0,1.

Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1. Вообще нет бракованных деталей:

$$P_{0,4} = \frac{4!}{0! \cdot 4!} 0,1^0 \cdot 0,9^4 = 0,6561.$$

2. Одна бракованная деталь:

$$P_{1,4} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} 0,1^1 \cdot 0,9^3 = 0,2916.$$

3. Две бракованные детали:

$$P_{2,4} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} 0,1^2 \cdot 0,9^2 = 0,0486.$$

4. Три бракованные детали:

$$P_{3,4} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} 0,1^3 \cdot 0,9^1 = 0,0036.$$

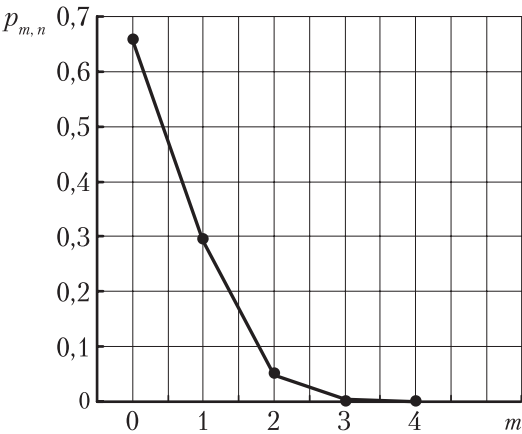
5. Четыре бракованные детали:

$$P_{4,4} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} 0,1^4 \cdot 0,9^0 = 0,0001.$$

Ряд распределения имеет вид

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Построим многоугольник распределения



Пример 3.2. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Вычислить вероятности числа выпадений четного числа очков на обеих игровых костях одновременно (не в сумме).

Решение. Каждая игральная кость имеет три варианта четных очков: 2, 4 и 6 из шести возможных, т.е. вероятность выпадения четного числа очков на одной кости равна 0,5.

Вероятность одновременного выпадения четных очков на двух костях равна $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.

Одновременно четные числа очков на двух костях при двух бросаниях костей могут выпасть 0, 1 или 2 раза.

Вероятность того, что при двух испытаниях ни одного раза не выпадет четного числа очков на обеих костях, равна

$$P_{0, 2} = \frac{2!}{0! \cdot 2!} 0,25^0 \cdot 0,75^2 = 0,5625.$$

Вероятность того, что при двух испытаниях один раз выпали четные очки на обеих костях, равна

$$P_{1, 2} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} 0,25^1 \cdot 0,75^1 = 0,375.$$

Вероятность того, что при двух испытаниях оба раза выпали четные очки на обеих костях, равна

$$P_{2, 2} = \frac{2!}{0! \cdot 2!} 0,25^2 \cdot 0,75^0 = 0,0625.$$

Аналогично примеру 3.1 можно записать ряд распределения дискретной случайной величины X — числа выпадений четного числа очков на обеих игральные кости одновременно. ►

Пример 3.3. Найти дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления этого события в каждом испытании равны и известно, что $MX = 0,9$.

Решение. Так как случайная величина X распределена по биномиальному закону, то

$$MX = np = 2p = 0,9; \Rightarrow p = 0,45.$$

$$DX = npq = 2p(1 - p) = 2 \cdot 0,45 \cdot 0,55 = 0,495. \quad \blacktriangleright$$

3.2. Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет **геометрическое** распределение, если она представляет собой число повторных независимых испытаний до первого успеха.

- Если случайная величина X имеет геометрическое распределение, то она принимает значения $m = 1, 2, 3, \dots$ (счетное множество значений) с вероятностями

$$p_m = P(X = m) = pq^{m-1}, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p.$$

Математическое ожидание и дисперсия X :

$$MX = 1/p, \quad DX = q/p^2.$$

Пример 3.4. Контроль качества большой партии изделий проводится до первого появления бракованного изделия. В результате серии проверок обнаружилось, что бракованное изделие впервые появлялось в среднем при десятом испытании. Оценить вероятность появления брака p .

Решение. Пусть X — число испытаний до первого появления бракованного изделия. Эта случайная величина имеет геометрическое распределение. По условию ее среднее значение равно $MX = 10$. Так как $MX = 1/p$, то $p = 1/10 = 0,1$. ►

3.3. Закон Пуассона

Пусть производится n независимых испытаний, в которых появление события A имеет вероятность p . Пусть число

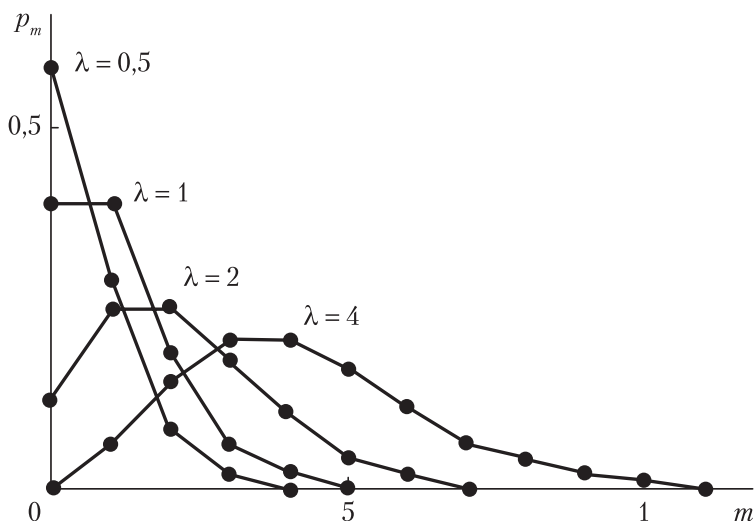


Рис. 3.1. Вид распределения Пуассона при малых значениях параметра распределения λ

испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события A в каждом испытании мала ($p \leq 0,05$).

- Тогда дискретная случайная величина X числа появления события A распределена по **закону Пуассона**, если она принимает целые значения $m = 0, 1, 2, \dots$ с вероятностями

$$p_m = P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!},$$

где $\lambda = np > 0$ — параметр распределения.

Значения вероятностей p_m приводятся в таблицах распределения Пуассона (приложение 5), а вид распределения показан на рис. 3.1.

- **Математическое ожидание и дисперсия** пуассоновской случайной величины равны параметру распределения Пуассона:

$$MX = \lambda; DX = \lambda.$$

Распределение Пуассона широко используется для приближенных вычислений.

3.4. Равномерное распределение

- Непрерывная случайная величина имеет **равномерное** распределение на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке

плотность распределения случайной величины постоянна, а вне отрезка равна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ C, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

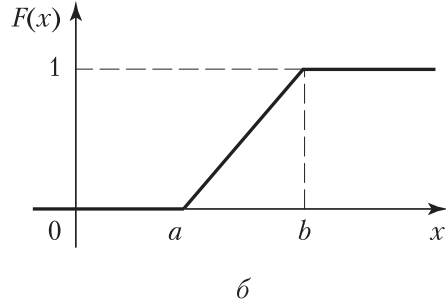
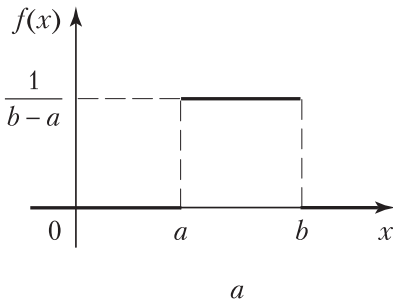


Рис. 3.2. Равномерное распределение

Постоянная величина C может быть определена из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения $f(x)$ (рис. 3.2, а).

Получаем $C = \frac{1}{b-a}$.

Найдем функцию распределения $F(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ изображена на рис. 3.2, б.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение равномерно распределенной случайной величины определяются формулами

$$MX = \frac{a+b}{2}; \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Равномерный закон распределения действует, например, при округлении чисел. Если числа округляются до целых значений, то ошибка округления, представляющая собой разность между действительным значением и округленным, равномерно распределена на полуинтервале $[-0,5; 0,5)$. Также по равномерному закону распределено время ожидания пассажиром транспорта при одинаковых интервалах его движения и т.д.

Пример 3.5. Интервал движения автобуса равен 15 мин. Какова вероятность того, что пассажир на остановке будет ждать автобус не более 5 мин?

Решение. Пусть случайная величина X — это время ожидания автобуса, равномерно распределенная по условию на отрезке $[0, 15]$. Причем $a = 0, b = 15, x_1 = 0, x_2 = 5$. Тогда ее функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x/15, & 0 < x \leq 15; \\ 1, & x > 15. \end{cases}$$

По формуле

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

вычисляем

$$P(0 \leq X \leq 5) = F(5) - F(0) = \frac{5}{15} - 0 = \frac{1}{3} \approx 0,33. \quad \blacktriangleright$$

Пример 3.6. Случайная величина X распределена по равномерному закону на отрезке $[-1; 3]$. Записать выражения для $f(x)$ и $F(x)$. Найти $MX, DX, \sigma X$.

Решение. Так как в данном примере $a = -1; b = 3$, то $b - a = 4$. Проведем вычисления

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \frac{1}{4}, & -1 \leq x \leq 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \frac{x+1}{4}, & -1 \leq x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$$MX = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1; \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \approx 1,33;$$

$$\sigma X = \sqrt{DX} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,15. \quad \blacktriangleright$$

3.5. Показательное (экспоненциальное) распределение

- Непрерывная случайная величина X имеет **показательное** распределение с параметром λ , если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ — параметр распределения.

- **Функция распределения** случайной величины, распределенной по показательному закону, равна

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Графики плотности распределения и функции распределения показательного распределения приведены на рис. 3.3.

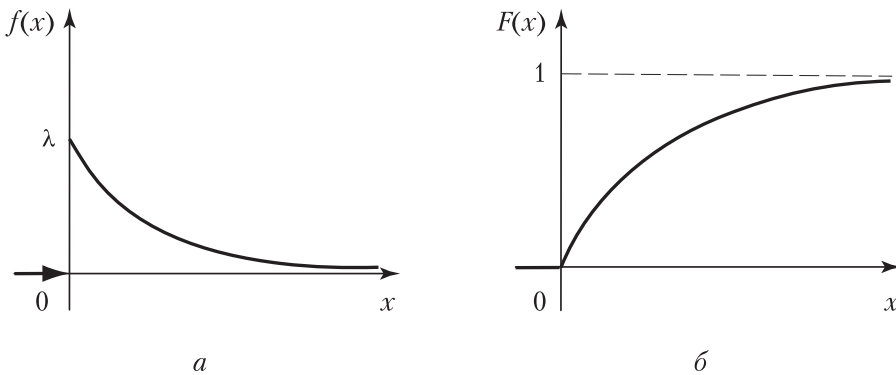


Рис. 3.3. Показательное распределение:
a — плотность; *б* — функция распределения

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение показательного распределенной случайной величины X

$$MX = \frac{1}{\lambda}; \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma X = \frac{1}{\lambda}.$$

Видно, что в случае показательного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равны.

Также легко определить и вероятность попадания случайной величины, подчиненной показательному закону распределения, в заданный интервал.

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = e^{-\lambda x_2} - e^{-\lambda x_1}.$$

Показательный закон распределения широко применяется в теории массового обслуживания, в теории надежности. По нему распределены, например, время простоя в очереди, время ремонта, время обслуживания и т.д.

Допустим, некоторое устройство начинает работать в момент времени $t_0 = 0$, а через какое-то время t происходит отказ устройства. Обозначим T непрерывную случайную величину — длительность безотказной работы устройства. Тогда функция распределения

$$F(t) = P(T < t)$$

определяет вероятность отказа за время t .

Вероятность противоположного события (безотказная работа в течение времени t) равна

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t).$$

- **Функцией надежности** $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы устройства в течение времени t .

Часто на практике длительность безотказной работы подчиняется показательному закону распределения. Если рассматривать новое устройство, то вероятность отказа в начале его функционирования будет больше, затем количество отказов снизится и будет некоторое время иметь практически одно и то же значение. Затем (когда устройство отработает свой ресурс) количество отказов будет возрастать.

Таким образом, функционирование устройства на протяжении всего существования (в смысле количества отказов) можно описать комбинацией двух показательных законов (в начале и конце функционирования) и равномерного закона распределения.

- Функция надежности для какого-либо устройства при показательном законе распределения равна

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

Данное соотношение называют **показательным законом надежности**.

Важным свойством, позволяющим значительно упростить решение задач теории надежности, является то, что вероятность безотказной работы устройства на интервале времени t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t .

Таким образом, безотказная работа устройства зависит только от интенсивности отказов λ и не зависит от безотказной работы устройства в прошлом.

Так как подобным свойством обладает только показательный закон распределения, то этот факт позволяет определить, является закон распределения случайной величины показательным или нет.

Пример 3.7. Установлено, что время T горения электрической лампочки является случайной величиной, распределенной по показательному закону. Считая, что среднее значение этой величины равно 6 месяцам, найти вероятность того, что лампочка будет гореть более года.

Решение. Так как по условию $MT = 1/\lambda = 6$, то $\lambda = 1/6$, а функция распределения случайной величины T имеет вид

$$F(T) = \begin{cases} 1 - e^{-T/6}, & T \geq 0; \\ 0, & T < 0. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что в году 12 месяцев, запишем

$$\begin{aligned} P(T > 12) &= P(12 < T < +\infty) = F(\infty) - F(12) = \\ &= 1 - (1 - e^{-12/6}) = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx \frac{1}{2,72^2} = 0,135. \end{aligned}$$

►

Пример 3.8. Среднее время простоя в очереди в магазине составляет 20 мин. Чему равна вероятность, что случайно взятый покупатель будет стоять в очереди от 20 до 40 мин? Принять время простоя в очереди распределенным по показательному закону.

Решение. Обозначим через X случайную величину, равную времени простоя в данном магазине случайного покупателя. Тогда по условию $MX = 20$. Требуется найти вероятность $P(20 < X < 40)$.

Случайная величина X распределена по показательному закону. Параметр распределения λ легко находится из равенства

$$MX = \frac{1}{\lambda} = 20. \text{ Отсюда } \lambda = \frac{1}{20}.$$

Из свойства функции распределения запишем

$$P(20 < X < 40) = F(40) - F(20) = \left(1 - e^{-\frac{1}{20} \cdot 40}\right) - \left(1 - e^{-\frac{1}{20} \cdot 20}\right) =$$

$$= 1 - e^{-2} - 1 + e^{-1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \approx \frac{1}{2,72} - \frac{1}{2,72^2} = 0,368 - 0,135 = 0,233. \blacktriangleright$$

3.6. Нормальное распределение и функция Лапласа

Одним из наиболее часто встречающихся на практике законов распределения непрерывной случайной величины является нормальный закон распределения, часто называемый еще законом Гаусса. Доказывается, что сумма достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения, при определенных (нежестких) ограничениях приближенно подчиняется нормальному закону, причем это приближение тем точнее, чем большее количество случайных величин суммируется. Основное ограничение для суммируемых величин состоит в том, чтобы они все равномерно играли в общей сумме относительно малую роль. Если, например, одна из случайных величин окажется по своему влиянию на сумму резко преобладающей над всеми другими, то приведенное выше правило не выполняется.

• Непрерывная случайная величина X имеет **нормальный закон** распределения (закон Гаусса) с параметрами распределения a и σ , если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Обозначим через $N(a; \sigma)$ множество случайных величин, распределенных по нормальному закону с параметрами a и σ .

• Функция распределения нормальной случайной величины $X \in N(a; \sigma)$ (ее график представлен на рис. 3.4) равна

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (3.1)$$

• **Математическое ожидание** случайной величины, распределенной по нормальному закону, равно параметру a , а **дисперсия** равна σ^2 , т.е.

$$MX = a; DX = \sigma^2.$$

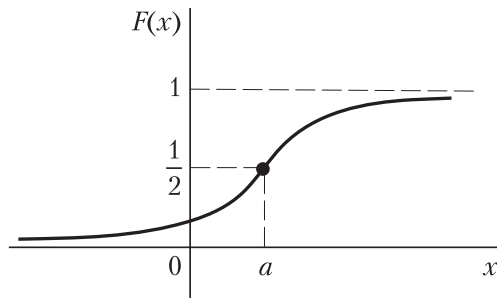


Рис. 3.4. Функция распределения нормальной случайной величины

Отсюда следует, что параметр σ равен среднему квадратичному отклонению $\sigma = \sigma X$. Кроме того, для такой случайной величины X число a является также **модой** MoX и **медианой** MeX распределения.

На рис. 3.5 приведены графики плотностей распределения нормально распределенных случайных величин при различных значениях параметров a и σ . Из рисунка очевидно, что параметр a характеризует положение, а σ — форму кривой нормального распределения.

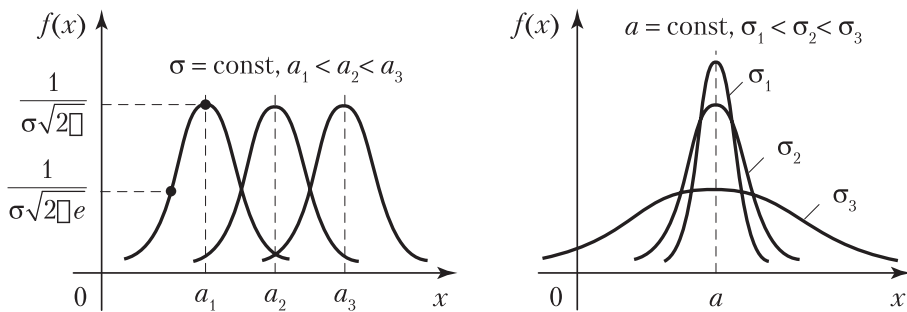


Рис. 3.5. Плотность нормального распределения

Плотность нормального распределения обладает следующими свойствами.

1. Плотность распределения $f(x)$ определена на всей числовой оси и принимает только положительные значения $f(x) > 0$.

2. Ось $0x$ является горизонтальной асимптотой графика плотности распределения, т.е. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента x значение $f(x)$ стремится к нулю, т.е. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

3. Вычислим экстремумы плотности распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Для этого найдем производную и приравняем ее к нулю

$$f'(x) = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0 \Rightarrow x = a.$$

Так как при переходе производной через точку $x = a$ производная меняет знак с «+» на «-», то в точке $x = a$ плотность распределения имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ (см. рис. 3.5).

4. Кривая нормального распределения является симметричной относительно вертикальной прямой $x = a$, так как разность $(x - a)$ входит в формулу плотности распределения в квадрате.

5. Для нахождения точек перегиба графика найдем вторую производную плотности распределения и приравняем ее к нулю

$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2} \right] = 0 \Rightarrow x = a \pm \sigma.$$

При $x = a + \sigma$ и $x = a - \sigma$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки меняет знак, т.е. в этих точках плотность распределения имеет перегиб. В этих точках значение плотности распределения равно $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e}$ (см. рис. 3.5).

Для примера кривые нормального распределения на рис. 3.6 построены при $a = 0$ и трех значениях среднего

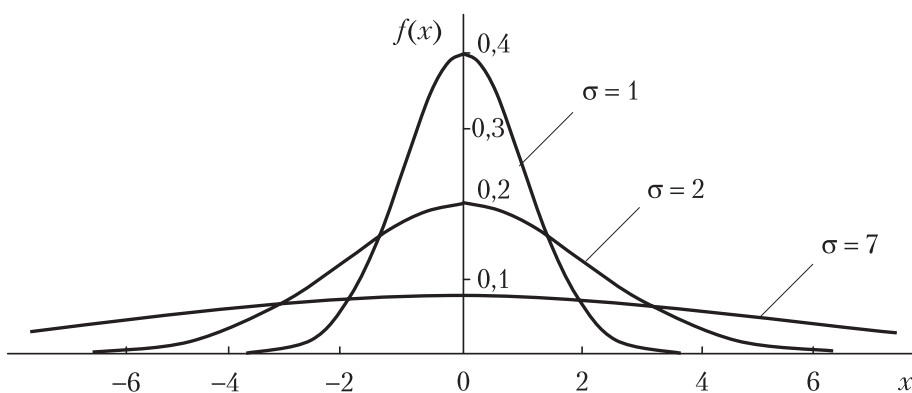


Рис. 3.6. Кривые нормального распределения

квадратичного отклонения $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ и $\sigma = 7$. Как видно, при увеличении значения среднего квадратичного отклонения график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается.

- При $a = 0$ и $\sigma = 1$ кривая плотности распределения называется **нормированной**. Уравнение нормированной кривой:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

К сожалению, интеграл в формуле (3.1) для $F(x)$ не выражается через элементарные функции, поэтому нахождение значений $F(x)$ вызывает определенные затруднения.

- Для их устранения вводится специальная функция $\Phi(x)$, которая называется **функцией Лапласа**:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Значения функции Лапласа представлены в таблице (приложение 4).

На рис. 3.7 показан график функции Лапласа.

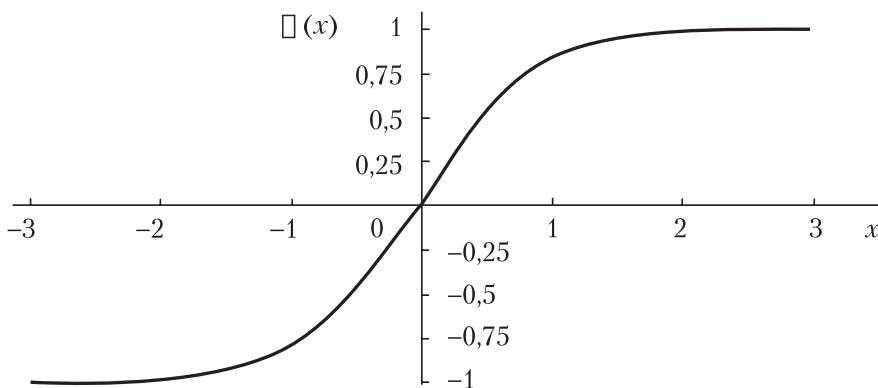


Рис. 3.7. График функции Лапласа

Функция Лапласа обладает следующими свойствами.

1. $\Phi(0) = 0$.
2. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, т.е. $\Phi(x)$ — нечетная функция.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = -1$.
4. Функция $\Phi(x)$ монотонно возрастает.

Сравнивая выражения для $\Phi(x)$ и $F(x)$, можно показать, что

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{x-a}{\sigma} \right) \right].$$

• С использованием функции Лапласа выражение для определения **вероятности попадания случайной величины X в заданный промежуток** от x_1 до x_2 можно записать следующим образом:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{x_2-a}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{x_1-a}{\sigma} \right) \right]. \quad (3.2)$$

В некоторых книгах (особенно старых изданиях) значения функции Лапласа в таблицах в 2 раза меньше. Иногда такую функцию называют **нормированной функцией Лапласа**. Ее легко определить по тому признаку, что при больших x значения функции близки к 0,5, а не к единице. Поэтому при пользовании таблицами этой функции в формуле (3.2) следует опустить множитель $\frac{1}{2}$.

Используя формулу (3.2), можно проиллюстрировать так называемое правило трех сигм, которое гласит: при нормальном распределении вероятность отклонения случайной величины от ее математического ожидания больше, чем на три средних квадратических отклонения, очень мала. Действительно,

$$\begin{aligned} P(|X-a| < 3\sigma) &= P(a-3\sigma < X < a+3\sigma) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{3\sigma}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{-3\sigma}{\sigma} \right) \right] = \Phi(3) \approx 0,9973. \end{aligned}$$

Следовательно, искомая вероятность

$$P(|X-a| \geq 3\sigma) = 1 - P(|X-a| < 3\sigma) = 1 - 0,9973 = 0,0027.$$

Пример 3.9. Текущая цена акции представляет собой нормально распределенную случайную величину X со средним значением 100 усл. ед. и дисперсией, равной 9 (усл. ед.)². Найти вероятность того, что цена акции в данный момент находится в пределах от 91 до 109 усл. ед.

Решение. Так как по условию задачи $a = 100$, $\sigma = \sqrt{9} = 3$, то искомая вероятность может быть вычислена по формуле (3.1)

$$\begin{aligned} P(91 \leq X \leq 109) &= \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{109-100}{3}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{91-100}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\Phi(3) - \frac{1}{2}\Phi(-3) = \frac{1}{2}\Phi(3) + \frac{1}{2}\Phi(3) = \Phi(3). \end{aligned}$$

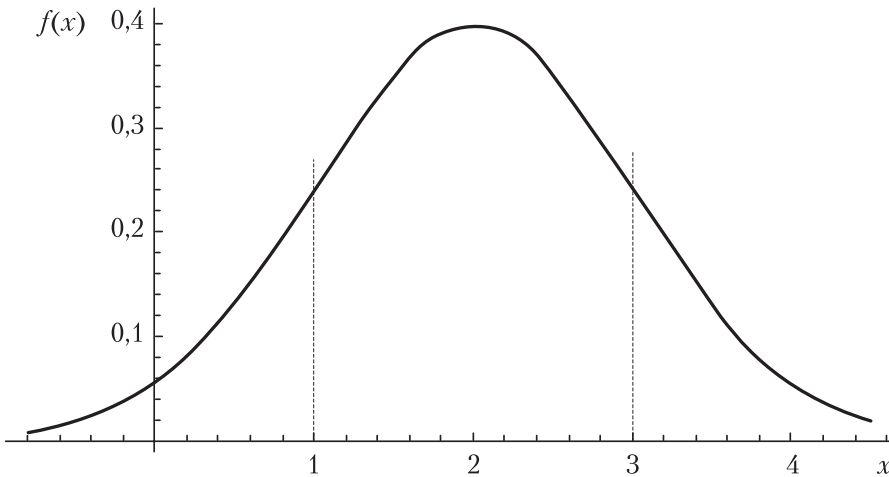
По таблице приложения 4 определяем, что $\Phi(3) = 0,9973$. ►

Пример 3.10. Нормально распределенная случайная величина X задана своими параметрами: математическим ожиданием $a = 2$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$. Требуется записать формулу плотности распределения, построить кривую распределения и найти вероятность того, что X примет значение из интервала $(1; 3)$, а также найти вероятность того, что X отклонится (по абсолютной величине) от математического ожидания менее чем на 2.

Решение. Подставляем в формулу определения плотности распределения исходные данные a и σ . Запишем:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}.$$

Построим график этой функции.



По формуле (3.1) найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $(1; 3)$.

$$P(1 \leq X \leq 3) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{3-2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{1}\right) \right] = \frac{1}{2} [\Phi(1) + \Phi(1)] = \Phi(1).$$

По таблице приложения 4 запишем: $\Phi(1) \approx 0,6827$.

Найдем вероятность отклонения случайной величины от математического ожидания на величину, меньшую, чем 2.

$$P(|X - 2| \leq 2) = P(0 \leq X \leq 4) = \\ = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{4-2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{0-2}{1}\right) \right] = \Phi(2) = 0,9545. \quad \blacktriangleright$$

Заметим, что нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что данный закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

3.7. Логнормальное распределение

Наиболее часто наблюдаемое отклонение от нормального распределения проявляется в нарушении симметрии кривой распределения. Особенно часто встречаются распределения с положительной асимметрией — вершиной, смещенной влево, и длинной пологой правой ветвью (рис. 3.8).

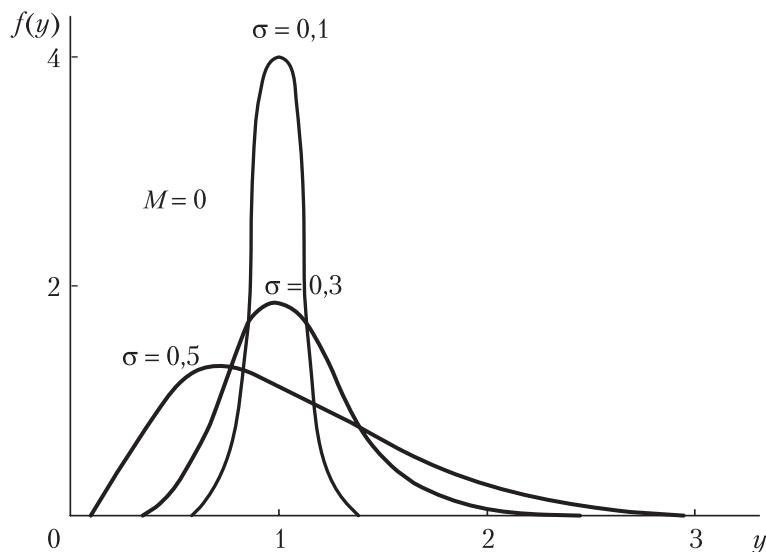


Рис. 3.8. График логнормального распределения с правосторонней асимметрией

В простейших случаях асимметричное распределение можно преобразовать к нормальному заменой переменных. В этом случае полагают $X = \ln Y$, где Y — случайная величина, подчиняющаяся так называемому логарифмически нормальному, или, сокращенно, **логнормальному распределению**.

Очевидно, что непрерывная случайная величина Y , в отличие от нормально распределенной случайной величины X , распределена в интервале $(0, +\infty)$. При этом плотность вероятности логнормального распределения имеет вид

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - a)^2}{2\sigma^2}}, & y > 0. \end{cases}$$

Функция логнормального распределения определяется формулой

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{1}{t} e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}} dt, & y > 0, \end{cases}$$

здесь a и σ^2 — соответственно математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , подчиняющейся нормальному закону распределения.

Функция логнормального распределения также может быть представлена как

$$F(y) = \Phi\left(\frac{\ln y - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(t)$ — определенная выше функция Лапласа.

- Логнормальное распределение имеет правостороннюю асимметрию, которая возрастает с увеличением σ .

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что называется законом распределения случайной величины?
2. Какая случайная величина называется распределенной по биномиальному закону? Как вычисляются вероятности, входящие в ряд распределения?

3. Запишите формулы математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения для случайной величины, распределенной по биномиальному закону.

4. Когда случайная величина называется распределенной по равномерному закону? Приведите примеры.

5. Запишите выражения для плотности распределения, функции распределения, математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения для случайной величины, распределенной по равномерному закону.

6. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром λ . Каковы выражения плотности и функции распределения случайной величины X ? Приведите три примера случайных величин, распределенных по показательному закону.

7. Чему равны числовые характеристики случайной величины, распределенной по показательному закону?

8. Запишите выражение плотности распределения нормально распределенной случайной величины и изобразите кривую нормального распределения. Как изменяется вид кривой при изменении параметров μ и σ нормального распределения?

9. Какие случайные величины распределены по нормальному закону?

10. Используя свойство плотности распределения, запишите выражение для функции распределения нормально распределенной случайной величины. Можно ли выразить полученный интеграл в элементарных функциях?

11. Дайте определение функции Лапласа $\Phi(x)$. Изобразите график $\Phi(x)$ и назовите ее свойства. Где можно найти значения функции Лапласа?

12. Запишите формулу, выражающую функцию распределения нормально распределенной случайной величины через $\Phi(x)$.

13. Запишите формулу для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в заданный диапазон.

14. Охарактеризуйте логнормальное распределение.

Задачи для самостоятельного решения

1. Число солнечных дней в году для данной местности является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 75 дней и дисперсией 25 дней. Определить вероятность того, что в следующем году в данной местности окажется не менее 70 и не более 85 солнечных дней.

2. Нормально распределенная случайная величина X имеет $MX = 2$ и $DX = 0,09$. Найти вероятность того, что X примет значение, удовлетворяющее неравенству $1,55 < X < 2,3$.

3. Найти вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал $(3, 10)$, если математическое ожидание MX равно 6, а дисперсия DX равна 9.

4. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке остается одной и той же и равна 0,02. Определить вероятность того, что среди 50 наугад выбранных деталей бракованных окажется менее 6.

Глава 4

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

После изучения главы 4 бакалавр должен:

знать

- основные законы больших чисел и их характеристики;

уметь

- использовать центральную предельную теорему при производстве оценочных расчетов в конкретных задачах;

владеть

- методами решения практических задач с использованием законов больших чисел.
-

На практике сложно сказать, какое конкретное значение примет случайная величина. Однако при воздействии большого числа различных факторов поведение случайных величин практически утрачивает случайный характер и становится закономерным. Этот факт очень важен, так как позволяет предвидеть результат опыта при воздействии большого числа случайных факторов.

Однако это возможно только при выполнении некоторых условий, которые определяются **законом больших чисел**. К законам больших чисел относятся теоремы Чебышева (наиболее общий случай) и теорема Бернулли (простейший случай), которые будут обсуждены ниже.

4.1. Основные неравенства закона больших чисел

- Если значения случайной величины X не отрицательны и она имеет математическое ожидание MX , то для любого $\epsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P(X \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{MX}{\varepsilon},$$

которое называется **неравенством Маркова**.

- Если случайная величина имеет дисперсию DX , то справедливо **неравенство Чебышева**

$$P(|X - MX| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Пример 4.1. Среднее число дождливых дней в году в данном районе равно 80. Оценить вероятность того, что в этом районе будет не более 100 дождливых дней в году.

Решение. Пусть X — число дождливых дней в году. По условию $\varepsilon = 100$, $MX = 80$. Тогда в соответствии с неравенством Маркова можно вычислить

$$P(X \leq 100) \geq 1 - \frac{80}{100} \Rightarrow P(X \leq 100) \geq 0,2. \quad \blacktriangleright$$

Пример 4.2. Суточная потребность в электроэнергии в населенном пункте является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 3000 кВт·ч, а дисперсия составляет 2500 (кВт·ч)². Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход электроэнергии в этом населенном пункте будет составлять от 2500 до 3500 кВт·ч.

Решение. Требуется найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $P(2500 \leq X \leq 3500) = ?$

Крайние значения интервала отклоняются от математического ожидания $MX = 3000$ на одну и ту же величину, а именно на 500. Тогда можно записать с учетом неравенства Чебышева

$$P(2500 \leq X \leq 3500) = P(|X - MX| \leq 500) \geq 1 - \frac{DX}{500^2}.$$

Отсюда получаем

$$P \geq 1 - \frac{2500}{250\,000} = 0,99.$$

То есть искомая вероятность будет не меньше, чем 0,99. ▶

4.2. Теорема Чебышева

Приведем закон больших чисел (теорему Чебышева) в упрощенной формулировке, пригодной для решения практических задач.

- Пусть случайные величины X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, независимы и имеют одинаковые математические ожидания $MX_i = a$ и дисперсии $DX_i = \sigma^2$, тогда справедливо

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - a\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

из которого при $n \rightarrow \infty$ следует **закон больших чисел**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - a\right| \leq \varepsilon\right) = 1.$$

Содержание закона больших чисел заключается в том, что отклонение средних значений от математического ожидания становится сколь угодно малым с вероятностью, близкой к единице, если n достаточно велико. Другими словами, вероятность любого отклонения среднего значения от его математического ожидания может быть сделана сколь угодно малой с ростом n .

Теорема Чебышева имеет большое значение в теории измерений. Из нее следует, что, проводя большое количество измерений одной и той же физической величины и беря среднее арифметическое, можно сделать погрешность измерений меньше любого наперед заданного положительного числа.

Действительно, если $DX_1 = DX_2 = \dots = DX_n = \sigma^2$, то

$$\begin{aligned} D(X) &= D\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \\ &= \frac{1}{n^2} (DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

То есть дисперсия случайной величины, являющейся средним арифметическим n случайных величин с одинаковыми дисперсиями, в n раз меньше дисперсии каждой из них.

Пример 4.3. Для определения урожайности поля площадью 200 га взяли выборку с каждого гектара. Известно, что по каждому гектару поля дисперсия не превышает 2 ц^2 . Оценить вероятность того, что отклонение средней выборочной урожайности от средней урожайности не превосходит $0,2 \text{ ц}$.

Решение. По неравенству Чебышева искомая вероятность

$$P \geq 1 - \frac{DX}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{2}{200 \cdot 0,04} = 0,75. \quad \blacktriangleright$$

Пример 4.4. Определить, сколько надо произвести замеров диаметров деревьев, чтобы средний диаметр деревьев отличался от истинного значения не более чем на 2 см с вероятностью, не меньшей $0,95$. Известно, что на данном участке среднее квадратическое отклонение диаметров деревьев не превышает 10 см .

Решение. Воспользуемся теоремой Чебышева, имея в виду, что $\varepsilon = 2$, $DX = \sigma^2 = 10^2$, запишем

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - a\right| < 2\right) \geq 1 - \frac{10^2}{n \cdot 2^2} \geq 0,95 \Rightarrow 0,05 \geq \frac{100}{4n}.$$

Откуда

$$n \geq 500.$$

Следовательно, для достижения требуемой точности необходимо произвести не менее 500 измерений. ►

4.3. Теорема Бернулли

Частным случаем закона больших чисел является теорема Бернулли.

• *Теорема.* Пусть имеется n повторных независимых испытаний с вероятностью успеха p и неуспеха $q = 1 - p$, m — число успехов, n — число испытаний. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

• Отсюда следует **закон больших чисел**:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема Бернулли утверждает, что частость события A стремится к его вероятности, так что при больших n отклонение частоты m/n от вероятности p становится сколь угодно малым. Эта теорема в некотором смысле обосновывает статистическое определение вероятности.

Пример 4.5. Сколько следует провести независимых испытаний, чтобы вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq 0,08$ превысила 0,75, если вероятность появления данного события в отдельном испытании $p = 0,8$?

Решение. Имея в виду, что $\varepsilon = 0,08$, $q = 0,2$, по теореме Бернулли получаем

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq 0,08\right) &\geq 1 - \frac{0,8 \cdot 0,2}{n \cdot 0,0064} \geq 0,75 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0,25 > \frac{0,16}{0,0064n} \Rightarrow n \geq 100. \end{aligned}$$

►

Пример 4.6. Сколько следует проверить деталей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,96, можно было ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты годных деталей от вероятности детали быть годной, равной 0,98, не превысит 0,02?

Решение. Условие задачи фактически означает, что выполняется неравенство

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,98\right| \leq 0,02\right) \geq 0,96.$$

Здесь m — число годных деталей; n — число проверенных деталей. Для применения неравенства Чебышева преобразуем полученное выражение

$$P(|m - 0,98n| \leq 0,02n) \geq 1 - \frac{DX}{(0,02n)^2} \geq 0,96.$$

После умножения выражения, стоящего в скобках, на n , получаем вероятность отклонения по модулю количества годных деталей от своего математического ожидания, следовательно, можно применить неравенство Чебышева, т.е. эта вероятность должна быть не меньше, чем величина $1 - \frac{DX}{(0,02n)^2}$, а по условию задачи еще и не

меньше, чем 0,96.

Таким образом, получаем неравенство

$$0,96 \leq 1 - \frac{DX}{(0,02n)^2},$$

в котором дисперсия может быть найдена по формуле $DX = npq$.

Получаем

$$DX \leq (0,02n)^2 - 0,96 \cdot (0,02n)^2; \quad n \cdot 0,98 \cdot 0,02 \leq 0,04 \cdot (0,02n)^2;$$

$$n \geq \frac{0,98 \cdot 0,02}{0,04 \cdot 0,0004}; \quad n \geq 1225.$$

То есть для выполнения требуемых условий необходимо не менее 1225 деталей. ►

В случае, если вероятности появления события A в каждом опыте различны, то справедлива следующая теорема, известная как **теорема Пуассона**.

• **Теорема.** Если производится n независимых опытов и вероятность появления события A в каждом опыте равна p_i , то при увеличении n частота события A сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей p_i :

$$P(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i.$$

4.4. Центральная предельная теорема

В рассмотренном выше законе больших чисел ничего не говорилось о законе распределения случайных величин.

Поставим задачу нахождения предельного закона распределения суммы $\sum_{i=1}^n X_i$ независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, когда число слагаемых n неограниченно возрастает. Эту задачу решает **центральная предельная теорема**.

В зависимости от условий распределения случайных величин X_i , образующих сумму, возможны различные формулировки центральной предельной теоремы. Приведем простейшую форму этой теоремы.

• **Теорема.** Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, т.е. $MX_i = a$; $DX_i = \sigma^2$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ закон распределения суммы этих случайных величин неограниченно приближается к нормальному с математическим ожиданием na и дисперсией $n\sigma^2$.

Из этой теоремы следует, что при большом числе одинаково распределенных случайных величин закон распределения их суммы можно приближенно считать нормальным.

В этом случае вероятность попадания этой суммы в заданный промежуток от α до β может быть приближенно определена по формуле, использующей функцию Лапласа

$$P\left(\alpha < \sum_{i=1}^n X_i < \beta\right) \approx \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right].$$

Пример 4.7. Поезд состоит из 100 вагонов. Масса вагона — случайная величина, имеющая среднее значение $a = 65$ т и дисперсию $\sigma^2 = 81$ т². Локомотив может везти состав массой, не превышающей 6600 т, в противном случае необходимо прицеплять второй локомотив. Какова вероятность того, что второй локомотив не потребуется?

Решение. Обозначим $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ — массы соответственно первого, второго, ..., сотого вагонов. Тогда масса поезда равна сумме масс всех этих вагонов, т.е. $\sum_{i=1}^{100} X_i$. Требуется найти вероятность

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i < 6600\right), \text{ которую можно записать как: } P\left(-\infty < \sum_{i=1}^{100} X_i < 6600\right).$$

Согласно следствию из центральной предельной теоремы

$$\begin{aligned}
 P(-\infty < \sum_{i=1}^{100} X_i < 6600) &\approx \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{6600 - 100 \cdot 65}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{100}} \right) - \Phi(-\infty) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} (\Phi(1,11) + 1) = \frac{1}{2} (0,7330 + 1) = 0,8665. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Заметим, что при увеличении числа опытов n биномиальное распределение стремится к нормальному и для приближенного вычисления вероятности попадания случайной величины X в заданный промежуток можно воспользоваться функцией Лапласа.

• Известна **интегральная теорема Муавра – Лапласа** (в некоторых книгах Лапласа), математическая формулировка которой имеет следующий вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(\alpha < X < \beta)}{\frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}} \right) \right]} = 1,$$

здесь $MX = np$; $DX = npq$.

Из интегральной теоремы Муавра – Лапласа вытекает приближенное равенство, которое тем точнее, чем больше значение n :

$$P(\alpha < X < \beta) \approx \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}} \right) \right].$$

Пример 4.8. Выборочным путем требуется определить среднюю длину изготавливаемых деталей. Сколько нужно исследовать деталей, чтобы с вероятностью, большей, чем 0,9, можно было утверждать, что средняя длина отобранных изделий будет отличаться от математического ожидания этого среднего (средняя длина деталей всей партии) не более, чем на 0,001 см? Установлено, что среднее квадратическое отклонение длины детали не превышает 0,04 см.

Решение. По условию дисперсия не превышает $(0,04)^2$. Также по условию задано

$$p = P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - MX \right| \leq 0,001 \right) > 0,9.$$

Если преобразовать соотношение, стоящее в скобках, и после этого применить неравенство Чебышева, получаем

$$P \left(\left| \sum_{i=1}^n X_i - nMX \right| \leq 0,001n \right) \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^n DX_i}{n^2 \cdot 0,001^2} > 0,9;$$

$$1 - \frac{n \cdot 0,04^2}{n^2 \cdot 0,001^2} > 0,9; \quad 0,1 \cdot 0,001^2 n > 0,04^2.$$

Окончательно

$$n > \frac{0,04^2}{0,1 \cdot 0,001^2}; \quad n > 16\,000.$$

То есть для достижения требуемой вероятности необходимо отобрать более 16 000 деталей. ►

Пример 4.9. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0,2. Определить вероятность того, что среди 50 наугад выбранных деталей бракованных окажется не менее 6.

Решение. Для того чтобы воспользоваться теоремой Муавра — Лапласа, найдем математическое ожидание и дисперсию количества бракованных деталей в 50 отобранных

$$MX = np = 50 \cdot 0,2 = 10;$$

$$DX = npq = 50 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 8.$$

Фактически в задаче требуется определить вероятность того, что бракованных деталей будет не менее 6, но и, очевидно, не более 50.

$$\begin{aligned} P(6 \leq X \leq 50) &= \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{50 - 10}{\sqrt{8}} \right) - \Phi \left(\frac{6 - 10}{\sqrt{8}} \right) \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{2} [\Phi(14,3) + \Phi(1,41)] \approx 0,5 \cdot (1 + 0,84) = 0,92. \end{aligned}$$

Значения функции Лапласа находятся по таблице приложения 4. Конечно, значения функции Лапласа $\Phi(14,3)$ в таблице нет, но так как в таблицах указано, что $\Phi(3) = 1,0000$, то все значения от величин, превышающих 3, также равны 1. ►

Пример 4.10. Известно, что 60% всего числа изготавливаемых заводом изделий являются изделиями первого сорта. Приемщик берет первые попавшиеся 200 изделий. Чему равна вероятность того, что среди них окажется от 120 до 150 изделий первого сорта?

Решение. Вероятность того, что деталь окажется первого сорта, равна 0,6.

Математическое ожидание числа изделий первого сорта равно

$$MX = np = 200 \cdot 0,6 = 120; \quad DX = npq = 200 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 48.$$

По теореме Муавра — Лапласа получаем

$$\begin{aligned}
 P(120 \leq X \leq 150) &= \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{150 - 120}{\sqrt{48}} \right) - \Phi \left(\frac{120 - 120}{\sqrt{48}} \right) \right] \approx \\
 &\approx \frac{1}{2} [\Phi(4,34) + \Phi(0)] \approx 0,5 \cdot (1 + 0) = 0,5.
 \end{aligned}$$

Пример 4.11. При установившемся технологическом процессе фабрика выпускает в среднем 80% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 100 изделий число первосортных заключено между 78 и 85?

Решение. Процесс проверки изделий на первосортность можно рассматривать как повторные независимые испытания при $n = 100, p = 0,8, q = 0,2$. То есть случайная величина X , равная числу изделий первого сорта в партии из 100 изделий, распределена по биномиальному закону. Согласно следствию из интегральной теоремы Лапласа имеем

$$\begin{aligned}
 P(78 < X < 85) &\approx \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{85 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \right) - \Phi \left(\frac{78 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} [\Phi(1,25) - \Phi(-0,5)] \approx \frac{1}{2} (0,7887 + 0,3839) = 0,5858.
 \end{aligned}$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте интегральную теорему Муавра — Лапласа. В каких случаях она применяется?
2. Запишите неравенства Маркова и Чебышева. В каких случаях они применяются?
3. Сформулируйте теорему Чебышева (закон больших чисел) и центральную предельную теорему. В каких случаях они применяются?
4. В чем заключается закон больших чисел?

Задачи для самостоятельного решения

1. Известно, что 80% всего числа изготавливаемых заводом изделий являются изделиями первого сорта. Приемщик наугад выбирает 200 изделий. Чему равна вероятность того, что среди них окажется от 110 до 160 изделий первого сорта?

2. Вероятность наступления события A в каждом испытании равна 0,4. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что в 15 000 испытаниях отклонение относительной частоты появления события A от его вероятности не превзойдет по абсолютной величине 0,01.

3. Сколько следует проверить деталей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,96, можно было ожидать, что абсолютная величина

отклонения относительной частоты годных деталей от вероятности детали быть годной, равной 0,98, не превысит 0,02?

4. Суточная потребность электроэнергии в населенном пункте является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 3500 кВт·ч, а дисперсия составляет 2200 (кВт·ч)². Оценить вероятность, что в ближайшие сутки расход электроэнергии в этом населенном пункте будет от 2500 до 4500 кВт·ч.

Глава 5

МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

После изучения главы 5 бакалавр должен:

знать

- основные понятия о многомерных случайных величинах;
- характеристики двумерных дискретных и непрерывных случайных величин;

уметь

- вычислять значения характеристик двумерных случайных величин;

владеть

- методами оценки степени зависимости случайных величин.
-

Рассмотренные выше случайные величины были одномерными, т.е. они определялись одним числом. Однако существуют также случайные величины, которые определяются двумя, тремя и т.д. числами. Такие случайные величины называются двумерными, трехмерными и т.д.

- Набор n случайных величин $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ называется **многомерной случайной величиной** или **многомерным случайным вектором**.

Многомерная случайная величина каждому элементарному событию ставит в соответствие n действительных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые приняли случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ в результате испытания.

Пример 5.1. Цена единицы товара C и количество товара V на рынке представляют собой двумерную случайную величину. ►

Для простоты и наглядности изложения в дальнейшем будем рассматривать только двумерные случайные величины.

Универсальной характеристикой для задания многомерных случайных величин является закон распределения.

- **Законом распределения** многомерных случайных величин называется соотношение, устанавливающее связь между областями возможных значений многомерных

случайных величин и вероятностями появления их в этих областях.

Пусть (x, y) — пара действительных чисел. Тогда множество

$$\{(X < x), (Y < y)\}$$

является множеством событий, а их вероятность задает значение **двумерной функции распределения**.

• **Функцией распределения** двух случайных величин называется функция двух аргументов $F(x, y)$, равная вероятности совместного выполнения двух неравенств $X < x, Y < y$

$$F(x, y) = P[(X < x), (Y < y)].$$

Отметим следующие свойства функции распределения двух случайных величин.

1. Если один из аргументов стремится к плюс бесконечности, то функция распределения стремится к функции распределения одной случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) &= F_1(x); \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) &= F_2(y).\end{aligned}$$

2. Значения функции распределения лежат в диапазоне

$$0 \leq F(x, y) \leq 1.$$

3. Если оба аргумента стремятся к бесконечности, то функция распределения системы стремится к единице:

$$F(\infty, \infty) = 1.$$

4. При стремлении одного или обоих аргументов к минус бесконечности функция распределения стремится к нулю:

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

5. Функция распределения является неубывающей функцией по каждому аргументу, т.е.

$$\begin{aligned}\text{из } x_1 < x_2 &\Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y), \\ \text{из } y_1 < y_2 &\Rightarrow F(x, y_1) \leq F(x, y_2).\end{aligned}$$

6. Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольный прямоугольник со сторонами $[a, b]$ и $[c, d]$, параллельными координатным осям, вычисляется по формуле

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c).$$

В зависимости от типа случайных величин многомерные случайные векторы могут быть дискретными, непрерывными или смешанными, если в вектор входят различные типы случайных величин.

5.1. Дискретные двумерные случайные величины

• Если случайные величины X и Y дискретны, то двумерная случайная величина $\{X, Y\}$, состоящая из них, называется **дискретной**.

Дискретная двумерная случайная величина может принимать конечное или счетное множество значений. Под ее значением понимается пара действительных чисел (x, y) .

• **Законом распределения** дискретной двумерной случайной величины называется множество ее значений и вероятностей этих значений, т.е.

$$p_{ij} = P[(X = x_i), (Y = y_j)],$$

где $i = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2, 3, \dots$.

Закон распределения двумерной дискретной случайной величины с конечным числом значений можно представить в виде двумерной **матрицы распределения**, в каждой ячейке которой содержатся вероятности произведения событий (табл. 5.1).

Пусть $A_{ij} = \{(X = x_i), (Y = y_j)\}$ — множество событий, состоящих в том, что случайная величина X примет значение x_i , а случайная величина Y примет значение y_j . Здесь i меняет значения от 1 до n , а j — от 1 до m .

Таблица 5.1

Двумерная матрица распределения

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m	Σ
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...	p_{1m}	$p_1 = \sum_{j=1}^m p_{1j}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2j}	...	p_{2m}	$p_2 = \sum_{j=1}^m p_{2j}$
...							...
x_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ij}	...	p_{im}	$p_i = \sum_{j=1}^m p_{ij}$

Окончание табл. 5.1

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	Σ
$\dots$							$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$		$\dots$	p_{nm}	$p_n = \sum_{j=1}^m p_{nj}$
Σ	q_1	q_2	$\dots$	q_j	$\dots$	q_m	1

Эти события наступают с соответствующими вероятностями p_{ij} . Тогда, если эти события A_{ij} несовместны и в совокупности образуют полную группу событий, выполняется условие нормировки

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1.$$

В этом случае распределения одномерных случайных величин X и Y , составляющих двумерную случайную величину $\{X, Y\}$, определяются формулами

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m p_{ij};$$

$$q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n p_{ij}.$$

Таким образом, суммируя ячейки матрицы вероятностей по строкам, получим распределение случайной величины X , а по столбцам — величины Y . Вероятности p_i и q_j записывают в последний столбец и последнюю строку таблицы распределения соответственно.

Для дискретной двумерной случайной величины функция распределения вычисляется по формуле

$$F(x, y) = \sum_{i, x_i < x} \sum_{j, y_j < y} p_{ij}.$$

5.2. Непрерывные двумерные случайные величины

- **Непрерывной** называется двумерная случайная величина $\{X, Y\}$, если ее функция распределения $F(x, y)$ непрерывна по обоим аргументам.

Определение функции распределения аналогично определению, приведенному выше.

Для вычисления основных характеристик непрерывной двумерной случайной величины удобно пользоваться плотностью распределения.

• **Плотностью совместного распределения** вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная частная производная от функции распределения

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Если известна плотность распределения, то функция распределения может быть легко найдена по формуле

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy.$$

Двумерная плотность распределения неотрицательна, и двойной интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

По известной плотности совместного распределения можно найти плотности распределения каждой из составляющих двумерной случайной величины

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Тогда соответствующие функции распределения примут вид

$$F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x f_1(x) dx = -\infty \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy;$$

$$F_2(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y f_2(y) dy = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy.$$

Таким образом, плотность распределения является еще одной характеристикой непрерывной двумерной случайной величины.

5.3. Условные законы распределения

Как было показано выше, зная совместный закон распределения, можно легко найти законы распределения каждой случайной величины, входящей в систему.

На практике чаще стоит обратная задача — по известным законам распределения случайных величин найти их совместный закон распределения.

В общем случае эта задача является неразрешимой, так как закон распределения случайной величины ничего не говорит о связи этой величины с другими случайными величинами.

Кроме того, если случайные величины зависимы между собой, то закон распределения не может быть выражен через законы распределения составляющих. Для этого нужно установить связь между составляющими.

Таким образом, условные законы распределения играют важную роль при исследовании многомерных случайных величин.

- Распределение одной случайной величины, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, называется **условным законом распределения**.

Рассмотрим это понятие вначале для дискретных двумерных случайных величин. Если считать в табл. 5.1, что событие $Y = y_j$ произошло, то распределение случайной величины X называется **условным распределением** при условии $Y = y_j$. Из определения условной вероятности находим

$$p_j(x_i) = P(X/Y) = \frac{P(XY)}{P(Y)} = \frac{p_{ij}}{q_j}.$$

Условное распределение случайной величины Y при условии $X = x_i$ задается формулой

$$p_i(y_j) = \frac{p_{ij}}{p_i}.$$

Числовые характеристики многомерных случайных величин определяются аналогично одномерным величинам. В названиях характеристик добавляется слово «условное»; так определяются условное математическое ожидание, условная дисперсия, условные моменты многомерных случайных величин.

• **Условным математическим ожиданием** двумерной дискретной случайной величины Y при фиксированном значении $X = x$ (x — определенное значение X) называется произведение всех возможных значений Y на их условные вероятности

$$M(Y/X = x) = \sum_{i=1}^m y_j p(y_j/x),$$

здесь $p(y_j/x) = p(x, y_j)/p(x)$.

Пример 5.2. Найти условное математическое ожидание составляющей Y при $X = x_1 = 1$ для дискретной двумерной случайной величины, заданной таблицей

$Y \backslash X$	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = 8$
$y_1 = 3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2 = 6$	0,30	0,10	0,03	0,07

Решение. Из таблицы выписываем

$$p(x_1) = 0,15 + 0,30 = 0,45.$$

Вычислим

$$p(y_1/x_1) = p(x_1, y_1)/p(x_1) = 0,15/0,45 = 1/3;$$

$$p(y_2/x_1) = p(x_1, y_2)/p(x_1) = 0,30/0,45 = 2/3;$$

$$\begin{aligned} M(Y/X = x_1) &= \sum_{j=1}^2 y_j p(y_j/x_1) = \\ &= y_1 p(y_1/x_1) + y_2 p(y_2/x_1) = 3 \cdot 1/3 + 6 \cdot 2/3 = 5. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Аналогично определяются условная дисперсия и условные моменты двумерных случайных величин.

В случае непрерывных двумерных случайных величин условный закон распределения можно задавать как функцией распределения, так и плотностью распределения.

• **Условная плотность распределения** вычисляется по формулам

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx};$$

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy}.$$

Условная плотность распределения обладает всеми свойствами плотности распределения одной случайной величины.

- Для непрерывных случайных величин **условное математическое ожидание** имеет вид

$$M(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y/x)dy,$$

где $f(y/x)$ — условная плотность случайной величины Y при $X = x$.

Заметим, что условное математическое ожидание $M(Y/x) = f(x)$ является функцией от x и называется **функцией регрессии X на Y** .

Если $S \subset R^2$ — область в двумерном пространстве, то вероятность попадания двумерной случайной величины в эту область выражается интегралом

$$P[\{X, Y\} \in S] = \iint_S f(x, y) dx dy.$$

В частности, если S представляет собой прямоугольник (рис. 5.1) с вершинами $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_1)$, $C(a_2, b_2)$, $D(a_1, b_2)$, то вероятность попадания случайной величины в S равна

$$P[\{X, Y\} \in S] = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx dy.$$

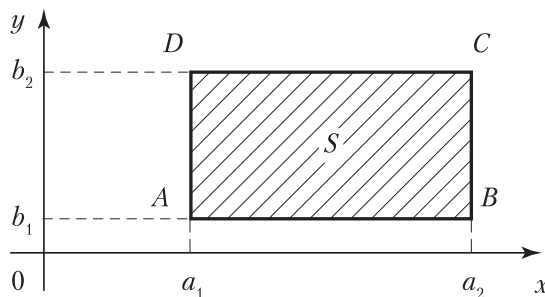


Рис. 5.1. Вычисление вероятности попадания случайной величины

5.4. Независимые случайные величины. Коэффициент корреляции

- Случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения принимает другая случайная величина.

Понятие зависимости случайных величин является очень важным в теории вероятностей. Условные распределения независимых случайных величин равны их безусловным распределениям.

Определим необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

- *Теорема.* Для того чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения пары (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Аналогичную теорему можно сформулировать и для плотности распределения.

- *Теорема.* Для того чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы (X, Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

- **Корреляционным моментом μ_{xy} (коэффициентом вариации)** случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от их математических ожиданий.

$$\mu_{xy} = M[(X - MX)(Y - MY)].$$

На практике используются формулы:

1) для дискретных случайных величин

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - MX)(y_j - MY)p(x_i, y_j);$$

2) для непрерывных случайных величин

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)(y - MY)f(x, y)dx dy.$$

Свойство корреляционного момента:

- Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий

$$|\mu_{xy}| \leq \sqrt{D_x D_y}.$$

Корреляционный момент служит для того, чтобы охарактеризовать связь между случайными величинами. Если случайные величины независимы, то их корреляционный момент равен нулю.

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин X и Y . Этот факт является недостатком этой числовой характеристики, так как при различных единицах измерения получаются различные корреляционные моменты, что затрудняет сравнение корреляционных моментов случайных величин.

Для того чтобы устранить этот недостаток, применяется другая характеристика — коэффициент корреляции.

- **Коэффициентом корреляции r_{xy}** случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной.

Коэффициент корреляции r_{xy} обладает следующими свойствами.

1. $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.
2. Для независимых случайных величин X и Y $r_{xy} = 0$. Если $r_{xy} \neq 0$, то X и Y являются зависимыми случайными величинами.
3. Если $Y = aX + b$, то $r_{xy} = \operatorname{sgn} a$, где

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1, & a > 0; \\ 0, & a = 0; \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Из свойств коэффициента корреляции следует, что r_{xy} является мерой линейной зависимости случайных величин X и Y .

- Случайные величины называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля, и **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы, но из некоррелированности нельзя сделать вывод об их независимости. Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Часто по заданной плотности распределения системы случайных величин можно определить зависимость или независимость этих величин.

Пример 5.3. Задана плотность распределения системы случайных величин X и Y .

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1)}.$$

Выяснить, являются ли независимыми случайные величины X и Y .

Решение. Для решения этой задачи преобразуем плотность распределения

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\pi^2(1 + x^2 + y^2(1 + x^2))} = \\ &= \frac{1}{\pi^2(1 + x^2)(1 + y^2)} = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \cdot \frac{1}{\pi(1 + y^2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, плотность распределения удалось представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x , а другая — только от y . То есть случайные величины X и Y независимы. Разумеется, они также будут некоррелированными. ►

Пример 5.4. Найти коэффициент корреляции между величинами X и Y , совместный закон распределения которых задан в таблице

$X \backslash Y$	1	2	3	4	p_i
10	0,2	0,02	0,01	0	0,23
20	0,03	0,3	0,02	0	0,35
30	0,02	0,1	0,2	0,1	0,42
q_i	0,25	0,42	0,23	0,1	1

Решение. Последовательно находим

$$MX = \sum_i x_i p_i = 10 \cdot 0,23 + 20 \cdot 0,35 + 30 \cdot 0,42 = 21,9;$$

$$MY = \sum_j y_j q_j = 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,42 + 3 \cdot 0,23 + 4 \cdot 0,1 = 2,18;$$

$$MX^2 = \sum_i x_i^2 p_i = 10^2 \cdot 0,23 + 20^2 \cdot 0,35 + 30^2 \cdot 0,42 = 541;$$

$$MY^2 = \sum_j y_j^2 q_j = 1^2 \cdot 0,25 + 2^2 \cdot 0,42 + 3^2 \cdot 0,23 + 4^2 \cdot 0,1 = 5,6;$$

$$M(X \cdot Y) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = 10 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,02 + 30 \cdot 0,01 + 20 \cdot 0,03 + \\ + 40 \cdot 0,3 + 60 \cdot 0,02 + 30 \cdot 0,02 + 60 \cdot 0,1 + 90 \cdot 0,2 + 120 \cdot 0,1 = 53,1.$$

Тогда

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 541 - 21,9^2 = 61,39; \sigma X = \sqrt{DX} = 7,8.$$

$$DY = MY^2 - (MY)^2 = 5,6 - 2,18^2 = 61,39; \sigma Y = \sqrt{DY} = 0,9;$$

$$r_{xy} = \frac{M(X \cdot Y) - MX \cdot MY}{\sigma X \cdot \sigma Y} = \frac{53,1 - 21,9 \cdot 2,18}{7,8 \cdot 0,9} = 0,7. \quad \blacktriangleright$$

В заключение заметим, что для нормального распределения понятия независимости и некоррелируемости совпадают, т.е. если две нормальные величины некоррелированы, то они независимы.

В общем случае это утверждение неверно.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Вероятность какого события задает сумма элементов первой строки матрицы распределения двумерной случайной величины?

2. Вероятность какого события задает сумма элементов первого столбца матрицы распределения?

3. Как можно из матрицы распределения случайной величины $\{X, Y\}$ получить условное распределение величины при условии $X = x_1$?

4. Чему равна сумма всех элементов матрицы распределения?

5. Какую величину определяет вторая частная производная $\frac{d^2 F(x, y)}{dx dy}$ функции распределения?

6. Как находится вероятность попадания двумерной случайной величины в прямоугольник при заданной совместной плотности распределения?

7. Чему равен коэффициент корреляции для независимых случайных величин?

Задачи для самостоятельного решения

1. Как находится значение $F(5, 5)$ функции распределения двух независимых случайных величин X и Y ?

2. Как по заданной матрице распределения найти вероятность попадания двумерной случайной величины в квадрат $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 5$?

3. Чему равен коэффициент корреляции случайных величин X и Y , если $Y = 2X$?

Глава 6

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

После изучения главы 6 бакалавр должен:

знать

- основные понятия теории случайных функций;
- вероятностные характеристики случайного процесса;
- операции над случайными процессами;

уметь

- производить расчеты значений характеристик случайных процессов;

владеть

- методом оценки основных параметров случайных процессов.
-

6.1. Основные понятия теории случайных функций

Случайная величина, рассмотренная выше, характеризуется тем, что в результате опыта принимает некоторое одно, заранее неизвестное, но единственное значение. Однако на практике часто приходится иметь дело со случайными величинами, значения которых в процессе наблюдения непрерывно меняются. Например, курс валюты в определенный период.

Такие случайные величины называются случайными функциями. Их характерной особенностью является то, что их вид до наблюдения в точности указать нельзя.

- **Случайной функцией** будем называть функцию, которая в результате наблюдения может принять тот или иной конкретный вид, но заранее неизвестно, какой именно.

Другой характерной особенностью случайной функции является то, что в силу непредсказуемости ее поведения изобразить случайную функцию в общем виде на графике не представляется возможным. Можно лишь записать конкретный вид случайной функции, полученный в результате проведения опыта. Этот конкретный вид случайной функции называют ее *реализацией*.

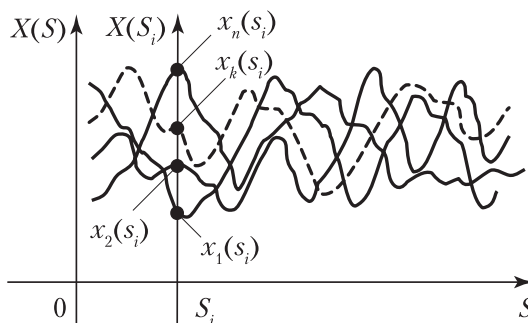


Рис. 6.1. Реализации случайных функций

В теории вероятностей, как и случайные величины, случайные функции принято обозначать большими буквами латинского алфавита $X(S)$, $Y(S)$, $Z(S)$, а их реализации — маленькими $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$.

Очевидно, что в силу своей случайности реализации случайные функции, зафиксированные в различных опытах, будут отличаться друг от друга. На рис. 6.1 в качестве примера приведены реализации случайной функции $X(S)$.

При фиксированном значении аргумента случайная функция вырождается в случайную величину. Действительно, зафиксировав значение аргумента s случайной функции $X(S)$, получим лишь одно значение случайной функции $X(S) = X(s)$ (см. рис. 6.1). Следовательно, в соответствии с определением значение $X(s)$ есть случайная величина, которую называют **сечением случайной функции**.

При анализе экономических систем чаще всего приходится рассматривать случайные функции во времени. Такие случайные функции обычно называют **случайными** или **стохастическими процессами**.

6.2. Вероятностные характеристики случайного процесса

Как было указано выше, при фиксированном значении аргумента t случайный процесс превращается в обычную случайную величину. Если же зафиксировать несколько, например m , значений аргумента t (рис. 6.2), получим совокупность случайных величин, т.е. случайный вектор.

Случайный процесс можно с некоторым приближением заменить рассмотрением случайного вектора с координатами

$$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m). \quad (6.1)$$

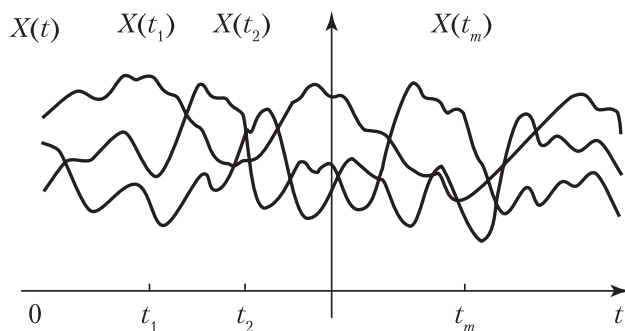


Рис. 6.2. Совокупность сечений случайного процесса

Причем по мере увеличения m такая замена будет становиться все более и более точной. В пределе число значений аргумента и, соответственно, число случайных величин (6.1) становится бесконечным. Таким образом, понятие случайного процесса можно рассматривать как обобщение понятия случайного вектора с бесконечно большим числом составляющих.

Рассмотрим вероятностные характеристики случайного процесса. Исходя из представления случайного процесса как m -мерного случайного вектора (6.1) при $m \rightarrow \infty$, его закон распределения будет представлять собой функцию бесконечно большого числа аргументов. Естественно, что таким законом распределения пользоваться невозможно.

Однако, рассматривая конечное число сечений случайного процесса, можно определить закон распределения для одного, двух, трех и т.д. сечений.

Рассмотрим случайную величину $X(t)$ — сечение случайного процесса в момент времени t . Эта случайная величина подчиняется закону распределения, который в общем случае зависит от t . Обозначим его $f_1(x, t)$.

- Функцию $f_1(x, t)$ называют **одномерным законом** распределения случайного процесса.

Отметим, что этот закон распределения не будет являться полной, исчерпывающей вероятностной характеристикой случайного процесса $X(t)$. Действительно, $f_1(x, t)$ характеризует только закон распределения $X(t)$ для данного, хотя и произвольного сечения t , но не отвечает на вопрос о зависимости случайных величин $X(t)$ для различных сечений t .

Более полной характеристикой случайного процесса $X(t)$ будет являться так называемый **двумерный закон**

распределения $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$. Это закон распределения двух произвольных сечений случайного процесса $X(t_1)$ и $X(t_2)$.

Еще более полной характеристикой будет **трехмерный закон** распределения $f_3(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3)$. Теоретически можно рассматривать **m -мерный закон** $f_m(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m)$, который будет являться тем более полной характеристикой случайного процесса $X(t)$, чем больше сечений $X(t)$ будем рассматривать. Однако на практике оперировать функциями, зависящими от столь большого числа аргументов, крайне неудобно.

В связи с этим при исследовании случайного процесса чаще всего пользуются **простейшими вероятностными характеристиками**, аналогичными числовым характеристикам случайных величин. Однако в отличие от числовых характеристик случайных величин (математическое ожидание, дисперсия и т.д.), характеристики случайных функций будут представлять собой в общем случае не числа, а функции.

Рассмотрим произвольное сечение случайного процесса $X(t)$ при фиксированном t .

- Так как сечение случайного процесса есть случайная величина, то для нее определено понятие **математического ожидания**, которое для произвольного сечения случайного процесса также будет зависеть от t

$$m_x(t) = M[X(t)]. \quad (6.2)$$

Рассматривая случайный процесс как m -мерный вектор в соответствии с формулой (6.2), для каждой составляющей этого вектора можно определить математическое ожидание (рис. 6.3). При $m \rightarrow \infty$ вместо совокупности точек $m_x(t_k)$,

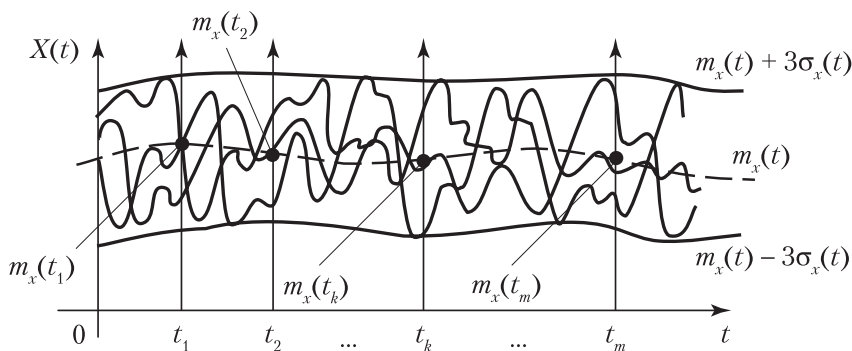


Рис. 6.3. Характеристики случайного процесса

$k = 1, \dots, m$ получим непрерывную линию, отмеченную на рисунке пунктиром. Эту кривую называют **математическим ожиданием** случайного процесса.

- **Математическим ожиданием случайного процесса** $X(t)$ называется такая неслучайная функция $m_x(t)$, которая при каждом фиксированном значении аргумента равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса.

Рассуждая аналогичным образом, можно определить и дисперсию случайного процесса.

- **Дисперсией случайного процесса** $X(t)$ называется такая неслучайная функция $D_x(t)$, которая при каждом фиксированном значении аргумента t равна дисперсии соответствующего сечения случайного процесса

$$D_x(t) = D[X(t)] = M[(X(t) - m_x(t))^2]. \quad (6.3)$$

По своему физическому смыслу математическое ожидание случайного процесса есть некоторая средняя функция, около которой произвольным образом варьируются реализации случайного процесса (см. рис. 6.3). Дисперсия же по своему смыслу характеризует разброс (отклонение) возможных реализаций случайного процесса относительно $m_x(t)$ (средней функции).

Из формулы (6.3) следует, что $D_x(t)$, как и дисперсия случайной величины, есть неотрицательная функция, имеющая размерность квадрата случайного процесса $X(t)$. Последнее является неудобным, поэтому на практике для характеристики разброса возможных реализаций СП (случайного процесса) $X(t)$ относительно $m_x(t)$ используют, как и в теории случайных величин,

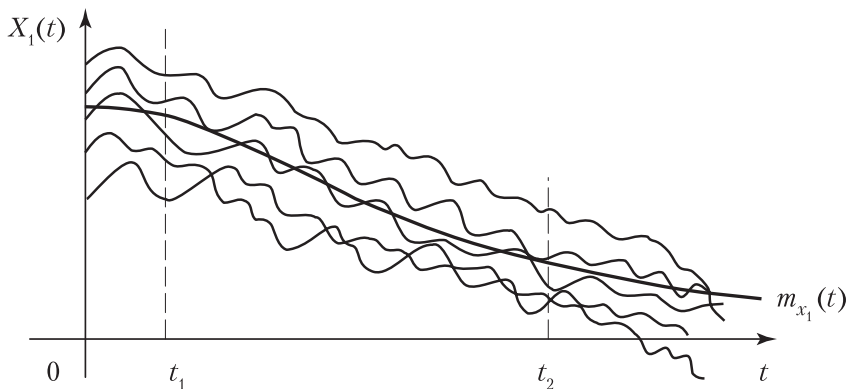


Рис. 6.4. Медленно меняющийся случайный процесс

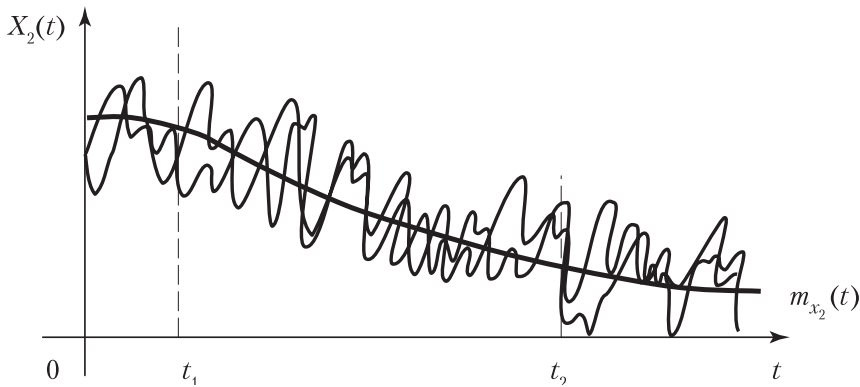


Рис. 6.5. Быстро меняющийся случайный процесс

- **Среднее квадратическое отклонение:**

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \quad (6.4)$$

Математическое ожидание, дисперсия являются важными характеристиками случайного процесса, но они не в полной мере отражают его структуру. Так, например, на рис. 6.4 и 6.5 изображены семейства реализаций случайных процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$ соответственно. Характерной особенностью этих случайных процессов является то, что они имеют одинаковые математическое ожидание и дисперсию

$$m_{x_1}(t) = m_{x_2}(t); D_{x_1}(t) = D_{x_2}(t).$$

Из рисунков очевидно, что характер изменения случайных процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$ различен, чего математическое ожидание и дисперсия не отражают. Так, случайный процесс $X_1(t)$ изменяется более плавно, постепенно.

То есть если в точке t_1 случайный процесс $X_1(t)$ принял значение, превышающее $m_{x_1}(t)$, то весьма вероятно, что в точке t_2 значение $X_1(t)$ также примет значение больше среднего. Напротив, случайный процесс $X_2(t)$ (см. рис. 6.5) имеет более резкий характер беспорядочных колебаний.

Для более полной характеристики случайного процесса необходимо помимо математического ожидания и дисперсии иметь еще одну характеристику, которая отражала бы внутреннюю структуру случайного процесса. Для этого используют корреляционный момент двух произвольных сечений случайного процесса.

- Разность

$$X(t) - m_x(t) = \overset{\circ}{X}(t)$$

называется **центрированным случайным процессом**.

• **Корреляционный момент** случайных величин $X_1(t)$, $X_2(t)$ случайного процесса $X(t)$, соответствующих двум сечениям случайного процесса при фиксированных значениях t_1 и t_2 аргумента t , будет равен

$$K_x(t_1, t_2) = M[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)]. \quad (6.5)$$

Варьируя произвольным образом значения t_1 и t_2 , получим в общем случае функцию двух переменных t_1 и t_2 (6.5). Эту функцию называют корреляционной функцией.

• **Корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$** называют такую неслучайную функцию $K_x(t_1, t_2)$ двух аргументов t_1 и t_2 , которая при любых фиксированных их значениях численно равна корреляционному моменту сечений $X_1(t)$ и $X_2(t)$ случайного процесса.

Заметим, что при $t_1 = t_2 = t$ правая часть выражения (6.5) будет представлять собой математическое ожидание квадрата центрированного случайного процесса, т.е. его дисперсию

$$K_x(t, t) = D_x(t). \quad (6.6)$$

Следовательно, задание корреляционной функции случайного процесса определяет и его дисперсию. Поэтому в качестве основных характеристик случайного процесса достаточно рассматривать его математическое ожидание и корреляционную функцию.

Свойства корреляционной функции.

1. Корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ симметрична относительно своих аргументов

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1).$$

2. При прибавлении к случайному процессу $X(t)$ некоррелированной с ним случайной величины Y корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ увеличивается на величину, равную дисперсии случайной величины Y , т.е. для

$$Z(t) = X(t) + Y$$

при любом t

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + D_y.$$

3. При умножении случайного процесса $X(t)$ на произвольную неслучайную функцию $\varphi(t)$ его корреляционная функция умножается дважды на функцию $\varphi(t)$ при аргументах t_1 и t_2 , т.е. при $Z(t) = X(t) \cdot \varphi(t)$

$$K_Z(t_1, t_2) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2) \cdot K_x(t_1, t_2).$$

4. При совпадении аргументов корреляционной функции она обращается в дисперсию случайного процесса

$$K_x(t, t) = D_x(t).$$

Иногда вместо корреляционной функции для характеристики связи между значениями случайного процесса пользуются нормированной корреляционной функцией.

• **Нормированной корреляционной функцией** называют коэффициент корреляции значений случайного процесса, соответствующий двум произвольно выбранным значениям t_1 и t_2 аргумента t . Коэффициент определяется формулой

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \cdot \sigma_x(t_2)}.$$

6.3. Операции над случайными процессами

Как и случайные величины, случайные процессы могут быть связаны операциями сложения и умножения.

1. Сложение

Пусть случайный процесс $Z(t)$ является суммой случайных процессов $X(t)$, $Y(t)$

$$Z(t) = X(t) + Y(t). \quad (6.7)$$

Тогда математическое ожидание случайного процесса $Z(t)$ равно

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t).$$

В случае некоррелированных случайных процессов можно записать

$$K_Z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2).$$

Для коррелированных случайных процессов последняя формула существенно усложняется.

В частном случае, если в формуле (6.7) второе слагаемое является неслучайной функцией $\varphi(t)$

$$Z(t) = X(t) + \varphi(t),$$

математическое ожидание случайного процесса $Z(t)$ будет равно

$$m_z(t) = m_x(t) + \varphi(t),$$

а корреляционная функция $K_Z(t_1, t_2)$ будет равна корреляционной функции $K_x(t_1, t_2)$

$$K_Z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2).$$

2. Умножение случайного процесса на неслучайную функцию

Рассмотрим произведение

$$Y(t) = X(t) \cdot \varphi(t),$$

где $X(t)$ — случайный процесс с известными характеристиками $m_x(t)$, $K_x(t_1, t_2)$, а функция $\varphi(t)$ — неслучайная.

Математическое ожидание случайного процесса будет равно

$$m_y(t) = M[Y(t)] = M[X(t) \cdot \varphi(t)] = \varphi(t) \cdot m_x(t),$$

т.е. при нахождении математического ожидания случайного процесса неслучайную функцию можно выносить за знак математического ожидания.

Корреляционная функция случайного процесса вычисляется по формуле

$$K_y(t_1, t_2) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2) \cdot K_x(t_1, t_2).$$

Таким образом, при умножении случайного процесса на неслучайную функцию ее математическое ожидание равно произведению математического ожидания случайного процесса на эту неслучайную функцию, а корреляционная функция случайного процесса умножается на неслучайную функцию дважды при аргументах t_1 и t_2 .

6.4. Основные типы случайных процессов

1. Стационарный случайный процесс

- Случайный процесс $X(t)$ называется **стационарным**, если его математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов t_1 и t_2 , т.е.

$$m_x(t) = m_x = \text{const}, K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau),$$

где $\tau = t_1 - t_2$.

Таким образом, корреляционная функция стационарного случайного процесса является функцией не двух аргументов (t_1, t_2) , а одного — τ .

Вероятностные характеристики такого случайного процесса не зависят от времени t .

Заметим, что если у случайного процесса $X(t)$ корреляционная функция $K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau)$, а $m_x(t) \uparrow \text{const}$, то такая нестационарность случайного процесса несущественна, так как всегда можно перейти к центрированному случайному процессу $\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t)$, для которого $M[X(t)] = 0 = \text{const}$, а его корреляционная функция $K_x(\tau)$, в соответствии со свойствами корреляционной функции, не изменится.

2. Белый шум

• **Белым шумом** называется центрированный случайный процесс $X(t)$ с некоррелированными сечениями, имеющий бесконечную дисперсию. В основе процесса типа белого шума лежат физические представления, связанные с быстро изменяющимися величинами.

Значения этих величин, разделенные сколь угодно малыми промежутками времени, практически независимы. Корреляционная функция белого шума пропорциональна дельта-функции

$$K_x(t_1, t_2) = G(t) \cdot \delta(t_1 - t_2).$$

Из последней формулы следует, что дисперсия белого шума бесконечна

$$D_x(t) = K_x(t, t) = G(t) \cdot \delta(0) = \infty.$$

Множитель $G(t)$ представляет собой интенсивность белого шума. Если $G(t) = G = \text{const}$, то белый шум стационарный.

В природе белый шум в чистом виде не существует. Понятие белого шума является математической абстракцией, удобной для теоретических исследований и построения математических моделей.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что называется случайной функцией и ее реализацией?
2. Перечислите вероятностные характеристики случайного процесса.
3. Выпишите свойства корреляционной функции.
4. Перечислите операции над случайными функциями.
5. Дайте характеристику основных типов случайных процессов.

Глава 7

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

После изучения главы 7 бакалавр должен:

знать

- основные определения теории систем массового обслуживания;
- содержания задач теории систем массового обслуживания;

уметь

- решать задачи теории систем массового обслуживания;

владеть

- методами обработки статистических данных в системах массового обслуживания.
-

7.1. Основные понятия. Классификация систем массового обслуживания

- **Системами массового обслуживания** (СМО) принято называть системы, предназначенные для многоразового использования при решении однотипных задач.

Примерами СМО являются магазины, ателье, телефонные станции, билетные кассы, ремонтные мастерские и т.д.

- Каждая СМО может состоять из одной или нескольких обслуживающих единиц, которые называются **каналами** обслуживания.
- По числу каналов СМО подразделяются на **одноканальные** и **многоканальные**.
- Каждое обращение клиента в СМО будем называть **заявкой**.

Как правило, заявки поступают в СМО случайным образом, формируя случайный поток заявок. Продолжительность обслуживания заявки в канале СМО также носит

случайный характер. В конечном счете СМО по времени оказывается загруженной неравномерно. В периоды времени, когда мало заявок, СМО работает с недогрузкой или простаивает.

Если же поступает большое число заявок, то часть из них либо покидают СМО необслуженными, либо становятся в очередь. По этому признаку СМО подразделяются на два основных класса.

1. СМО с отказами. В такой СМО заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает систему.

2. СМО с ожиданием (с очередью). В этой СМО в случае занятости всех каналов заявка становится в очередь на обслуживание.

• При этом способ отбора для обслуживания заявок из очереди называется **дисциплиной обслуживания**.

Различают следующие виды дисциплин обслуживания заявок:

- а) первая пришла — первая обслужена;
- б) последняя пришла — первая обслужена;
- в) обслуживание с приоритетом — в первую очередь обслуживаются наиболее важные заявки;
- г) обслуживание с ограниченной длиной очереди;
- д) обслуживание с ограниченным временем пребывания в очереди и т.д.

Показатели эффективности функционирования СМО характеризуют ее способность справляться с потоком заявок. К числу показателей эффективности СМО с отказами относятся:

A — абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени);

Q — относительная пропускная способность (отношение абсолютной пропускной способности к числу заявок, приходящих в единицу времени);

$P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа в обслуживании;

S_k — среднее число занятых каналов.

В случае СМО с ожиданием к показателям эффективности относятся:

$L_{\text{сист}}$ — среднее число заявок в системе;

$L_{\text{оч}}$ — среднее число заявок в очереди;

$T_{\text{сист}}$ — среднее время ожидания обслуживания.

7.2. Понятие марковского случайного процесса. Потоки событий

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем работы. Это означает, что состояние СМО изменяется скачкообразно в случайный момент времени работы (например, при поступлении новой заявки или при окончании обслуживания заявки).

- Случайный процесс называется **марковским** или случайным **процессом без последдействия**, если для любого момента времени вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от состояния рассматриваемой системы в данный момент и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Например, марковским процессом можно считать процесс игры в шахматы: при определенной позиции (положении фигур на доске) вероятность выигрыша одного из игроков зависит только от этой позиции и не зависит от того, посредством каких предыдущих ходов эта позиция получилась.

- **Потоком событий** называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени.

- **Интенсивностью** потока событий λ называется среднее число событий, происходящих в единицу времени.

- **Стационарным потоком событий** называется поток, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. В частности, интенсивность стационарного потока является величиной постоянной.

- **Потоком событий без последдействия** называется поток, число событий которого, попавших на заданный временной интервал, не зависит от числа событий, попавших на другие временные интервалы.

- Поток событий называется **ординарным**, если вероятность попадания на малый промежуток времени Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

- Поток событий называется **простейшим**, если он одновременно стационарен, ординарен и без последдействия.

Название «простейший» объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое математическое описание.

Можно показать, что для простейшего потока число m событий, попадающих на произвольный интервал времени $(0, t)$, распределено по закону Пуассона:

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m \cdot e^{-\lambda t}}{m!}.$$

В частности, вероятность того, что за время t не произойдет ни одного события ($m = 0$), равна

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Обозначим через T случайную величину, равную интервалу времени между двумя последующими событиями простейшего потока. Очевидно, что вероятность того, что T будет не меньше t , равна вероятности, что за время t не произойдет ни одного события, т.е.

$$P(T \geq t) = P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Вероятность $P(T < t)$, с одной стороны, представляет собой вероятность противоположного события по отношению к вышеуказанному, а с другой стороны, она представляет собой по определению функцию распределения $F(t)$ для случайной величины T .

Таким образом,

$$F(t) = P(T < t) = 1 - P(T \geq t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Отсюда следует, что плотность распределения случайной величины T , равная производной по t от $F(t)$, определяется по формуле

$$p(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

То есть случайная величина T , равная интервалу времени между двумя последующими событиями простейшего потока, распределена по показательному закону с параметром λ и имеет математическое ожидание $MT = \frac{1}{\lambda}$ и дисперсию $DT = \frac{1}{\lambda^2}$.

Найдем вероятность попадания на малый временной интервал Δt хотя бы одного события простейшего потока. Эта вероятность равна вероятности того, что интервал между двумя последующими событиями в потоке будет меньше, чем Δt :

$$P(T < \Delta t) = F(\Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \cdot \Delta t.$$

Последнее приближенное равенство получаем путем разложения функции $e^{-\lambda\Delta t}$ в ряд Маклорена и отбрасыванием членов второго порядка и выше:

$$e^{-\lambda\Delta t} = 1 + (-\lambda\Delta t) + \frac{(-\lambda\Delta t)^2}{2!} + \dots \approx 1 - \lambda \cdot \Delta t.$$

Заметим, что если переход системы из одного состояния в другое происходит скачком, а количество состояний системы (конечное или бесконечное) можно пронумеровать, то такая система называется **системой дискретного типа**.

Если в такой системе количество возможных состояний счетно, то сумма вероятностей нахождения системы в одном из состояний равна 1:

$$\sum_k p_k(t) = 1.$$

Совокупность вероятностей $p_k(t)$ для каждого момента времени характеризует случайный процесс функционирования системы.

Случайные процессы со счетным множеством состояний бывают двух типов: с дискретным или непрерывным временем.

Если переходы системы из одного состояния в другое могут происходить только в строго определенные моменты времени, то случайный процесс будет процессом с дискретным временем, а если переход возможен в любой момент времени, то процесс будет процессом с непрерывным временем.

Поскольку заявки на СМО могут поступать в любой момент времени, то большинство реальных СМО характеризуются процессом с непрерывным временем.

Пример 7.1. В бюро обслуживания в среднем поступает 12 заявок в час. Считая поток заказов простейшим, определить вероятность того, что:

- а) за 1 мин не поступит ни одного заказа;
- б) за 10 мин поступит не более трех заказов.

Решение. Сначала найдем плотность (интенсивность) потока, выразив ее в количестве заявок в минуту. Очевидно, эта величина равна $\lambda = \frac{12}{60} = 0,2$ заявок в мин.

Далее находим вероятность того, что за время $t = 1$ мин не поступит ни одной заявки по формуле:

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} = e^{-0,2} \approx 0,819.$$

Вероятность того, что за 10 мин поступит не более трех заказов, будет складываться из вероятностей того, что не поступит ни одного заказа, поступит один, два или три заказа.

$$P(m \leq 3) = \sum_{m=0}^3 \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} = e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{4}{2}e^{-2} + \frac{8}{6}e^{-2} = \\ = \frac{19}{3}e^{-2} = 0,8571. \quad \blacktriangleright$$

Пример 7.2. В ресторан прибывает в среднем 20 посетителей в час. Считая поток посетителей простейшим и зная, что ресторан открывается в 11.00, определите:

а) вероятность того, что в 11.12 в ресторане будет 20 посетителей при условии, что в 11.07 их было 18;

б) вероятность того, что между 11.28 и 11.30 в ресторане окажется новый посетитель, если известно, что предшествующий посетитель прибыл в 11.25.

Решение. Для ответа на первый вопрос надо найти вероятность того, что в промежуток от 11.07 до 11.12 ($t=5$ мин) придет 2 посетителя. При этом известна интенсивность потока посетителей: $\lambda = 20/60 = 1/3$ посетителей в мин. Конечно, данная величина носит условный характер, так как посетители не могут приходить по частям.

Искомая вероятность равна:

$$P_2(5) = \frac{\left(\frac{1}{3} \cdot 5\right)^2}{2!} e^{-\frac{1}{3} \cdot 5} \approx 0,2623.$$

Перейдем ко второму вопросу. Неизвестно, сколько именно новых посетителей будет в промежутке от 11.28 до 11.30, главное, чтобы был хотя бы один. Эта вероятность равна

$$1 - P_0(2) = 1 - e^{-\frac{2}{3}} \approx 0,4866.$$

Здесь $P_0(2)$ — вероятность того, что в этом промежутке не будет ни одного посетителя. ▶

7.3. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями используют **граф состояний**, в котором каждое состояние $S_0, S_1, \dots, S_n$ исследуемой системы изображают в виде прямоугольника, а переход из состояния S_i в состояние S_j

под воздействием простейших потоков событий показывают дугой (стрелкой). Если около дуг записаны значения интенсивности потоков λ_{ij} , то граф состояния называют **размеченным**.

Пусть двухканальная СМО может находиться в одном из трех состояний: S_0 — оба канала свободны; S_1 — один из каналов занят обслуживанием, а другой свободен; S_2 — оба канала заняты обслуживанием.

Переходы системы из состояния S_0 в состояние S_1 и из S_1 в S_2 происходят под воздействием простейших потоков заявок с интенсивностями λ_{01} и λ_{12} соответственно, а из S_1 в S_0 и из S_2 в S_1 — под воздействием потоков обслуживания с интенсивностями λ_{10} и λ_{21} .

Тогда размеченный граф состояний СМО имеет вид, изображенный на рис. 7.1.

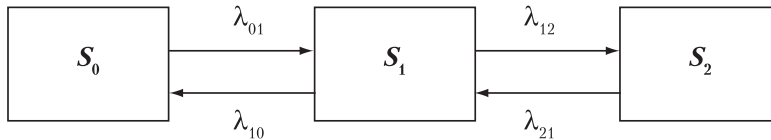


Рис. 7.1. Размеченный граф состояний двухканальной СМО

Пребывание СМО в том или ином состоянии носит вероятностный характер.

Обозначим $p_i(t)$ вероятность, что в момент времени t СМО находится в состоянии S_i . Поскольку нахождение СМО в состояниях S_0 , S_1 и S_2 образует полную группу событий, то выполняется условие нормировки

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1.$$

Зададим малое приращение времени Δt и найдем вероятность того, что СМО в момент времени $t + \Delta t$ будет находиться в состоянии S_1 . Это достигается разными вариантами.

1. В момент времени t СМО находилась в состоянии S_1 . Она могла быть выведена из этого состояния простейшим потоком с суммарной интенсивностью $\lambda_{10} + \lambda_{12}$. Как показано выше, вероятность этого приближенно равна

$$(\lambda_{10} + \lambda_{12}) \cdot \Delta t.$$

Тогда вероятность невыхода из S_1 равна

$$1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12}) \cdot \Delta t.$$

Согласно теореме умножения вероятностей вероятность того, что СМО останется в состоянии S_1 в момент $t + \Delta t$, приближенно равна:

$$p_1(t) \cdot [1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12}) \cdot \Delta t].$$

2. В момент времени t СМО находилась в состоянии S_0 . Переход СМО из S_0 в S_1 происходит под воздействием потока с интенсивностью λ_{01} с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{01} \cdot \Delta t$.

Тогда вероятность того, что при этом СМО будет находиться в состоянии S_1 в момент $t + \Delta t$, в этом варианте приближенно равна $p_0(t) \cdot \lambda_{01} \cdot \Delta t$.

3. В момент времени t СМО находилась в состоянии S_2 . Переход СМО из S_2 в S_1 происходит под воздействием потока с интенсивностью λ_{21} с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{21} \cdot \Delta t$.

Тогда вероятность того, что при этом СМО будет находиться в состоянии S_1 в момент $t + \Delta t$, в этом варианте приближенно равна $p_2(t) \cdot \lambda_{21} \cdot \Delta t$.

Применяя теорему сложения вероятностей для всех рассмотренных вариантов состояний, можно записать:

$$p_1(t + \Delta t) \approx p_1(t) \cdot [1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12}) \cdot \Delta t] + p_0(t) \cdot \lambda_{01} \cdot \Delta t + p_2(t) \cdot \lambda_{21} \cdot \Delta t.$$

Раскрыв скобки, перенеся $p_1(t)$ в правую часть приближенного равенства и поделив уравнение на Δt , получим

$$\frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} \approx p_0(t) \cdot \lambda_{01} + p_2(t) \cdot \lambda_{21} - p_1(t) \cdot (\lambda_{10} + \lambda_{12}).$$

При переходе к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ приближенные равенства перейдут в точные и получится дифференциальное уравнение

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = p_0(t) \cdot \lambda_{01} + p_2(t) \cdot \lambda_{21} - p_1(t) \cdot (\lambda_{10} + \lambda_{12}).$$

Проводя аналогичные рассуждения для других состояний СМО, можно получить систему дифференциальных уравнений, которые называются **уравнениями Колмогорова**.

При записи этих уравнений опустим зависимость вероятностей от времени, которая при этом подразумевается:

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = p_1\lambda_{10} - p_0\lambda_{01}, \\ \frac{dp_1}{dt} = p_0\lambda_{01} + p_2\lambda_{21} - p_1(\lambda_{10} + \lambda_{12}), \\ \frac{dp_2}{dt} = p_1\lambda_{12} - p_2\lambda_{21}. \end{cases} \quad (7.1)$$

В системе уравнений (7.1) для состояния S_0 записана первая формула, для S_1 — вторая и для S_2 — третья.

В общем случае система дифференциальных уравнений Колмогорова может быть построена по следующему алгоритму:

а) в левой части уравнения записывается производная по времени вероятности i -го состояния;

б) в правой части уравнения записывают сумму произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в i -е состояние на интенсивности соответствующих потоков минус произведение вероятности i -го состояния на суммарную интенсивность потоков, выходящих из i -го состояния. Такое дифференциальное уравнение записывается для каждого состояния.

При задании начальных условий можно решить систему дифференциальных уравнений Колмогорова и найти изменение во времени вероятностей состояний $p_i(t)$.

• Можно показать, что при $t \rightarrow \infty$ эти вероятности независимо от начальных условий стремятся к некоторым предельным значениям, которые называются **предельными** (или финальными) **вероятностями** СМО.

То есть $p_0(t) \rightarrow p_0, p_1(t) \rightarrow p_1, p_2(t) \rightarrow p_2$.

Смысл предельных вероятностей состоит в том, что они показывают среднее относительное время нахождения СМО в данном состоянии.

Так как предельные вероятности не изменяются во времени, то, заменяя в уравнениях Колмогорова (7.1) производные нулями, получим систему алгебраических уравнений для определения предельных вероятностей.

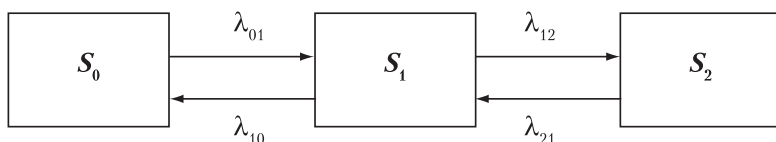
$$\begin{cases} p_0\lambda_{01} = p_1\lambda_{10}, \\ p_1(\lambda_{10} + \lambda_{12}) = p_0\lambda_{01} + p_2\lambda_{21}, \\ p_2\lambda_{21} = p_1\lambda_{12}. \end{cases} \quad (7.2)$$

В системе уравнений (7.2) обычно при решении второе уравнение заменяют условием нормировки

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1.$$

Систему таких уравнений можно составить по размеченному графу. Слева в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния, умноженная на суммарную интенсивность исходящих из данного состояния потоков, а справа — сумма вероятностей всех состояний, которые непосредственно могут перейти в данное состояние, на интенсивности входящих потоков.

Пример 7.3. Расчетный узел в отделе игрушек детского универмага состоит из двух кассовых аппаратов. Размеченный граф состояний такой СМО имеет вид



Найти относительное время пребывания СМО в следующих состояниях: S_0 — обе кассы свободны; S_1 — одна касса свободна, а другая занята; S_2 — обе кассы заняты, если $\lambda_{01} = 60$; $\lambda_{12} = 48$; $\lambda_{10} = \lambda_{21} = 36$. Здесь размерность интенсивности потоков — покупатель/ч.

Решение. Относительное время пребывания СМО в каждом состоянии равно предельным вероятностям состояний. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} p_0 \lambda_{01} = p_1 \lambda_{10}, \\ p_2 \lambda_{21} = p_1 \lambda_{12}, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

При составлении этой системы уравнений в системе (7.2) для предельных вероятностей исключаем второе уравнение как самое сложное и добавляем условие нормировки. Подставляя значения интенсивностей потоков, получаем

$$\begin{cases} 60 p_0 = 36 p_1, \\ 36 p_2 = 48 p_1, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} p_0 = \frac{3}{5} p_1, \\ p_2 = \frac{4}{3} p_1, \\ \frac{3}{5} p_1 + p_1 + \frac{4}{3} p_1 = 1. \end{cases}$$

Находим

$$p_1 = \frac{15}{44} \approx 0,341; p_0 = \frac{9}{44} \approx 0,204; p_2 = \frac{20}{44} \approx 0,455.$$

Из полученных результатов можно сделать вывод, что 20,4% рабочего времени обе кассы свободны, 34,1% времени занята одна касса и 45,5% времени заняты обе кассы. ►

7.4. Процесс гибели и размножения

В теории массового обслуживания широкое распространение имеет специальный класс случайных процессов — **процесс гибели и размножения**. Название этого процесса связано с биологией, где этот процесс представляет собой математическую модель численности биологических видов.

Рассматривается многоканальная СМО, которая содержит n каналов и пребывает в следующих состояниях:

S_0 — все каналы свободны;

S_1 — один канал занят;

S_2 — два канала заняты и т.д.

Переход из одного состояния в другое происходит с соответствующими интенсивностями, как указано для n возможных состояний системы на размеченном графе (рис. 7.2).

Переходы в рассматриваемой системе могут осуществляться из любого состояния только в состояния с соседними номерами, т.е. из состояния S_k возможны переходы только в состояние S_{k-1} или в состояние S_{k+1} .

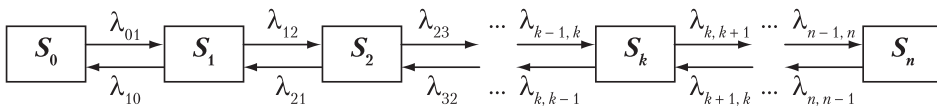


Рис. 7.2. Размеченный граф состояний процесса гибели и размножения

Предположим, что все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа, являются простейшими. Составим и решим алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний.

Согласно правилу составления таких уравнений:

— для состояния S_0 : $\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1$;

— для состояния S_1 : $(\lambda_{12} + \lambda_{10})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2$.

С учетом первого равенства после раскрытия скобок слагаемые $\lambda_{01}p_0$ и $\lambda_{10}p_1$ взаимно уничтожаются, и уравнение для S_2 имеет вид

$$\lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2.$$

Записывая аналогично уравнения для предельных вероятностей других состояний, можно получить следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1, \\ \lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2, \\ \dots \\ \lambda_{k-1,k}p_{k-1} = \lambda_{k,k-1}p_k, \\ \dots \\ \lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n,n-1}p_n. \end{array} \right.$$

К ней добавляется условие нормировки

$$p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1.$$

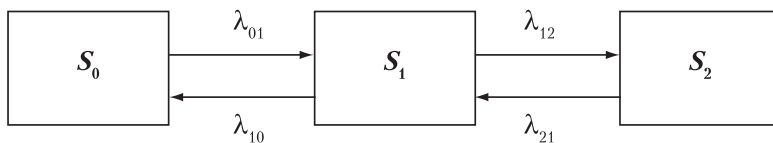
Решая полученную систему уравнений, можно получить

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n}\dots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}} \right)^{-1}; \quad (7.3)$$

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0; p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0; \dots p_n = \frac{\lambda_{n-1,n}\dots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0.$$

Пример 7.4. Решить предыдущий пример, используя теорию процесса гибели и размножения.

Решение. В условии предыдущего примера размеченный граф состояний имеет вид



Подставляя данные в формулы (7.3), получим

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{60}{36} + \frac{48 \cdot 60}{36 \cdot 36} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{5}{3} + \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 3} \right)^{-1} = \\
 &= \left(1 + \frac{35}{9} \right)^{-1} = \left(\frac{44}{9} \right)^{-1} = \frac{9}{44} \approx 0,204. \\
 p_1 &= \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0 = \frac{60}{36} \cdot \frac{9}{44} = \frac{15}{44} \approx 0,341; \\
 p_2 &= \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0 = \frac{48}{36} \cdot \frac{60}{36} \cdot \frac{9}{44} = \frac{20}{44} \approx 0,455.
 \end{aligned}$$

Выводы по примеру аналогичны предыдущему. ►

7.5. Системы массового обслуживания с отказами

Пусть имеется **одноканальная** СМО с отказами, в которую поступает поток заявок с интенсивностью λ . Заявки обслуживаются каналом СМО с некоторой интенсивностью μ . Процесс обслуживания образует поток обслуженных заявок.

Здесь и далее будем предполагать, что все потоки в СМО простейшие. Если заявка поступает в момент, когда единственный канал занят, то она получает отказ и в дальнейшей работе СМО не участвует. Требуется определить предельные вероятности состояний такой СМО и показатели ее эффективности.

СМО имеет два состояния: S_0 — канал свободен и S_1 — канал занят (рис. 7.3).

Система алгебраических уравнений для предельных вероятностей состояний такой СМО имеет вид

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1, \\ \mu p_1 = \lambda p_0. \end{cases}$$

То есть, по существу, имеем одно уравнение.

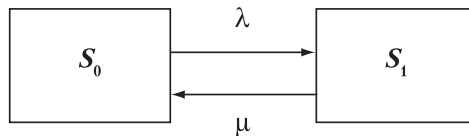


Рис. 7.3. Размеченный граф состояний одноканальной СМО с отказами

Добавляя к нему условие нормировки $p_0 + p_1 = 1$, найдем предельные вероятности состояний:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

которые показывают среднее относительное время пребывания СМО в соответствующих состояниях.

Вычислим показатели эффективности функционирования одноканального СМО с отказами.

Очевидно, что вероятность отказа $P_{\text{отк}}$ равна относительному времени, в течение которого канал занят, т.е.

$$P_{\text{отк}} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Относительная пропускная способность Q представляет собой вероятность, что заявка будет обслужена, т.е.

$$Q = p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Абсолютную пропускную способность СМО найдем, умножив Q на интенсивность потока заявок λ :

$$A = Q\lambda = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

Рассмотрим теперь **многоканальную** СМО с отказами. Пусть в СМО имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ . Поток обслуживается одним каналом с интенсивностью μ , двумя каналами — 2μ , тремя — 3μ и т.д.

Обозначим состояния СМО $S_0, S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_n$, где S_k — состояние, когда в ней находится k заявок, т.е. k каналов заняты.

Граф состояний СМО в этом случае (он соответствует процессу гибели и размножения) будет иметь вид, изображенный на рис. 7.4.

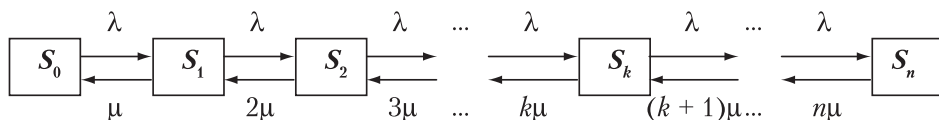


Рис. 7.4. Размеченный граф состояний многоканальной СМО с отказами

Из графа очевидно, что поток заявок последовательно переводит систему из левого состояния в соседнее, правое с одной и той же интенсивностью λ . Интенсивность потока обслуживания зависит от состояния.

Если СМО находится в состоянии S_2 (заняты два канала), то она может перейти в состояние S_1 когда закончат обслуживание либо первый, либо второй занятый канал. Следовательно, суммарная интенсивность потока обслуживания будет 2μ и т.д.

В соответствии с графом, изображенным на рис. 7.4, пропускную способность одного канала обозначим $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$ — двух каналов, $\rho = \frac{\lambda}{3\mu}$ — трех и т.д. Тогда по аналогии с формулами (7.3) нетрудно получить предельные вероятности состояний для рассматриваемой СМО:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^k}{k!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}; \quad (7.4)$$

$$p_1 = \rho \cdot p_0; \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_0; \quad \dots \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0; \quad \dots \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0.$$

Полученные формулы предельных вероятностей многоканальной СМО с отказами называются **формулами Эрланга**.

Запишем основные показатели эффективности функционирования многоканальной СМО с отказами.

Вероятность отказа СМО — это предельная вероятность того, что все n каналов заняты, т.е.

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0.$$

- Относительная пропускная способность — вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0. \quad (7.5)$$

- Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 \right).$$

- Среднее число занятых каналов $\bar{k}$ — это математическое ожидание числа занятых каналов, которое определяется по известной формуле математического ожидания:

$$\bar{k} = \sum_{i=0}^n k_i \cdot p_i,$$

где p_i — вероятность того, что i каналов будут заняты; k_i — количество занятых каналов.

Величину $\bar{k}$ можно найти проще. Так как каждый занятый канал обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени, то

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

Пример 7.5. Торговая фирма выполняет заказы на приобретение товаров по телефону. В настоящее время в офисе фирмы установлен 1 телефон. Интенсивность входящего потока заявок составляет 30 заявок в час. Длительность оформления заказа в среднем составляет 5 мин.

Определить показатели эффективности функционирования такой СМО. Сколько телефонов нужно поставить в офисе, чтобы относительная пропускная способность СМО была не менее 0,75?

Решение. При интенсивности потока заявок $\lambda = 30$ заявок/ч время обслуживания (оформление заказа) составляет $T = 5$ мин/заявку, количество каналов (телефонов) $n = 1$.

Приведем к одинаковой размерности интенсивность входящего потока и интенсивность обслуживания μ . Так как интенсивность потока обслуживания $\mu = \frac{1}{T}$, то

$$\mu = 60 \text{ мин/ч} : 5 \text{ мин/заявка} = 12 \text{ заявок/ч.}$$

Тогда показатели эффективности:

- Вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{30}{30 + 12} = \frac{30}{42} = 0,714.$$

- Относительная пропускная способность:

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{12}{30 + 12} = \frac{12}{42} = 0,286.$$

- Абсолютная пропускная способность:

$$A = Q \cdot \lambda = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} = \frac{30 \cdot 12}{30 + 12} = \frac{360}{42} = 8,57 \text{ заявок/ч.}$$

Чтобы найти, при каком минимальном количестве телефонов относительная пропускная способность будет не менее 0,75, будем постепенно увеличивать число телефонов в офисе и по формулам (7.5) определим относительную пропускную способность. Предварительно вычислим

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{30}{12} = 2,5.$$

Пусть в фирме установлено два телефона. Тогда количество каналов $n = 2$.

Вероятность того, что все телефоны свободны,

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + 2,5 + \frac{2,5^2}{2!}} = \frac{1}{6,625} = 0,151.$$

Тогда относительная пропускная способность

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_0 = 1 - \frac{2,5^2}{2!} \cdot 0,151 = 1 - 0,491 = 0,509.$$

Очевидно, что величина Q значительно меньше требуемого значения 0,75 по условию задачи. Добавим еще один телефон. Тогда производим все вычисления аналогично.

Если $n = 3$, то

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + 2,5 + \frac{2,5^2}{2!} + \frac{2,5^3}{3!}} = \frac{1}{9,229} = 0,108;$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^3}{3!} \cdot p_0 = 1 - \frac{2,5^3}{3!} \cdot 0,108 = 1 - 0,281 = 0,719.$$

Если $n = 4$, то

$$\begin{aligned} p_0 &= \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + 2,5 + \frac{2,5^2}{2!} + \frac{2,5^3}{3!} + \frac{2,5^4}{4!}} = \\ &= \frac{1}{10,857} = 0,092; \end{aligned}$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^4}{4!} \cdot p_0 = 1 - \frac{2,5^4}{4!} \cdot 0,092 = 1 - 0,150 = 0,850.$$

Из последнего решения следует, чтобы относительная пропускная способность СМО была не менее 0,75, в офисе должно быть не менее 4 телефонов. ►

7.6. Системы массового обслуживания с ожиданием

Пусть имеется одноканальная СМО с неограниченной очередью (например, телефон-автомат с одной будкой). То есть на СМО не наложены никакие ограничения ни по длине очереди, ни по времени ожидания.

Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность λ . Поскольку обслуживание ведет один канал, то обслуживание заявок производится с одинаковой интенсивностью μ для всех состояний.

Необходимо найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности СМО.

Система может находиться в одном из состояний $S_0, S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$ по числу заявок, находящихся в СМО:

S_0 — канал свободен;

S_1 — канал занят, обслуживает заявку, очереди нет;

S_2 — канал занят, в очереди одна заявка;

...

S_k — канал занят, в очереди $k - 1$ заявка;

...

Размеченный граф состояний СМО имеет вид, изображенный на рис. 7.5.

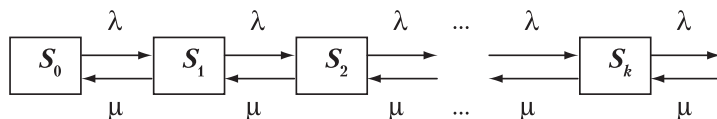


Рис. 7.5. Одноканальная СМО с ожиданием

Это процесс гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний. Для такого процесса доказано, что если среднее число приходящих заявок в единицу времени меньше среднего числа обслуживаемых заявок

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1,$$

то предельные вероятности существуют.

Если $\rho \geq 1$, то очередь растет до бесконечности.

Для определения предельных вероятностей состояний можно воспользоваться формулами (7.3) для процесса гибели и размножения (хотя они были получены для случая конечного числа состояний системы, ими можно воспользоваться и в данном случае). Тогда для случая одного канала $n = 1$ в соответствии с формулой (7.4) можно записать

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1}.$$

Предельные вероятности могут существовать лишь при $\rho < 1$. Ряд, стоящий в скобках, сходится к сумме $\frac{1}{1-\rho}$, так как это геометрический ряд со знаменателем меньшим, чем единица. Поэтому можно записать для первого члена прогрессии

$$p_0 = 1 - \rho,$$

а предельные вероятности других состояний определяются по формулам:

$$p_1 = \rho \cdot p_0 = \rho \cdot (1 - \rho); \quad p_2 = \rho^2 \cdot p_0 = \rho^2 \cdot (1 - \rho); \quad \dots \quad p_k = \rho^k \cdot p_0 = \rho^k \cdot (1 - \rho) \dots$$

Анализируя полученные зависимости, можно сделать вывод, что предельные вероятности состояний образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\rho < 1$. Тогда в этой прогрессии первый член p_0 — наибольший.

Это значит, что если СМО справляется с потоком заявок, то наиболее вероятным его состоянием из всех возможных состояний будет отсутствие заявок в системе.

Рассмотрим основные показатели такой СМО.

- Среднее число заявок в системе $L_{\text{сист}}$ определяется по формуле математического ожидания:

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = (1 - \rho) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^k.$$

Можно показать, что эта формула преобразуется при $\rho < 1$ к виду

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

- Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием $L_{об}$, также легко определить по формуле для математического ожидания:

$$L_{об} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = 1 - p_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho.$$

- Среднее число заявок в очереди $L_{оч}$, очевидно, определяется как разность $L_{сист}$ и $L_{об}$:

$$L_{оч} = L_{сист} - L_{об} = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho = \frac{\rho - \rho + \rho^2}{1 - \rho} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

- Среднее время пребывания заявки в системе $T_{сист}$ или в очереди $T_{оч}$ равно среднему числу заявок в системе или в очереди, деленному на интенсивность потока заявок:

$$T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1 - \rho)};$$

$$T_{об} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1 - \rho)}.$$

Эти зависимости называются **формулами Литтла**.

Пример 7.6. Мини-маркет с одним контролером-кассиром обслуживает покупателей, интенсивность входящего потока которых равна 20 покупателей/ч. Интенсивность потока обслуживания равна 25 покупателей/ч.

Найти показатели эффективности СМО, а также вероятность того, что в очереди стоят не более 2 покупателей.

Решение. Выпишем исходные данные:

$$\lambda = 20; \mu = 25; \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{25} = 0,8.$$

Проведем вычисления.

Вероятность того, что контролер-кассир свободен:

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Вероятность того, что кассир занят, равна

$$P_{зан} = 1 - p_0 = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Среднее число покупателей в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{0,8^2}{1 - 0,8} = 3,2.$$

Среднее число покупателей в мини-маркете:

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,8}{1-0,8} = 4.$$

Среднее время простоя в очереди:

$$T_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)} = \frac{0,8^2}{20 \cdot (1-0,8)} = 0,16 \text{ ч} = 9,6 \text{ мин.}$$

Среднее время нахождения в мини-маркете:

$$T_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1-\rho)} = \frac{0,8}{20 \cdot (1-0,8)} = 0,2 \text{ ч} = 12 \text{ мин.}$$

Вероятность того, что в очереди не более 2 покупателей, определяется по формуле

$$\begin{aligned} P(n \leq 2) &= p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = (1-\rho) \cdot (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3) = \\ &= (1-0,8) \cdot (1 + 0,8 + 0,8^2 + 0,8^3) = 0,2 \cdot 2,95 = 0,59. \end{aligned}$$



Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что называется системой массового обслуживания (СМО)?
2. Изложите классификацию СМО: а) по числу каналов; б) по характеру отношения к заявкам, пришедшим в момент полной занятости СМО; в) по способу отбора для обслуживания заявок из очереди.
3. Какие случайные процессы называют марковскими?
4. Какой поток событий называют простейшим? Каковы его свойства?
5. Запишите систему дифференциальных уравнений Колмогорова.
6. Запишите систему алгебраических уравнений для определения предельных вероятностей состояний.
7. Какие процессы называют процессами гибели и размножения?
8. Каковы показатели эффективности одноканальной СМО с отказами? Многоканальной СМО с отказами? Запишите выражения для их нахождения.
9. Изложите алгоритм оптимизационного анализа числа каналов в СМО.

Задачи для самостоятельного решения

1. В мини-маркете 2 кассы. Найти относительное время пребывания этой СМО в состояниях: S_0 — обе кассы свободны; S_1 — одна касса свободна, а другая занята; S_2 — обе кассы заняты, если $\lambda_{01} = 4$; $\lambda_{12} = 1$; $\lambda_{10} = 3$; $\lambda_{21} = 2$ покупателей/мин.
2. Найти относительную пропускную способность одноканальной СМО с отказами, если интенсивность входящего потока

заявок равна 80 заявок/ч, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки 3 мин.

3. Найти относительную пропускную способность одноканальной СМО с отказами, если интенсивность входящего потока заявок равна 40 заявок/ч, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки 1 мин.

4. Найти относительную пропускную способность одноканальной СМО с отказами, если интенсивность входящего потока заявок равна 72 заявки/ч, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки 2,5 мин. Какое минимальное число каналов нужно иметь этой СМО, чтобы ее относительная пропускная способность была не менее 0,75?

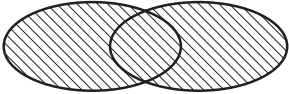
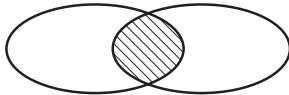
Тесты

Тесты составлены в соответствии с государственными стандартами изучения дисциплины «Математика» для специальностей «Менеджмент организаций» и «Государственное и муниципальное управление» на основе рекомендаций Национального аккредитационного агентства в сфере образования.

Целью сборника тестов является оказание помощи студентам в подготовке к аттестационной проверке их остаточных знаний, проводимой в форме тестирования.

Сборник содержит вопросы к разделам «Теория вероятностей» (163), «Математическая статистика» (55), «Дискретная математика» (55), разбитые на части в соответствии с содержанием книги.

В конце сборника приводятся правильные ответы.

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
Часть 1. Вопросы к главе 1 «Случайные события и их вероятности»	
1.1. Какой операции над событиями соответствует рисунок? A B 	1) AB ☐ 2) $\bar{A}$ ☐ 3) $A + B$ ☐ 4) $A - B$ ☐
1.2. Какой операции над событиями соответствует рисунок? A B 	1) AB ☐ 2) $\bar{A}$ ☐ 3) $A + B$ ☐ 4) $A - B$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.3. Если объективно шансы на наступление событий A и B одинаковы, то события A и B ...	1) противоположны ☐ 2) совместные ☐ 3) несовместные ☐ 4) невозможные ☐
1.4. Если в эксперименте возможны n элементарных исходов, а событие A наступает в результате m из них, то вероятность события A равна ...	1) $\frac{m}{n-m}$ ☐ 2) $\frac{n}{m}$ ☐ 3) $\frac{m}{n}$ ☐ 4) $\frac{n-m}{n}$ ☐
1.5. Вероятность достоверного события равна ...	1) 0,99 ☐ 2) -1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 1 ☐
1.6. Вероятность невозможного события равна ...	1) 1 ☐ 2) -1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 0,0002 ☐
1.7. Несовместные события не образуют полную группу событий, если их вероятности равны ...	1) $P(A) = \frac{1}{5}; P(B) = \frac{1}{5};$ $P(C) = \frac{3}{5}$ ☐ 2) $P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{4};$ $P(C) = \frac{1}{4}$ ☐ 3) $P(A) = \frac{1}{7}; P(B) = \frac{2}{7};$ $P(C) = \frac{4}{7}$ ☐ 4) $P(A) = \frac{1}{12}; P(B) = \frac{3}{4};$ $P(C) = \frac{1}{12}$ ☐

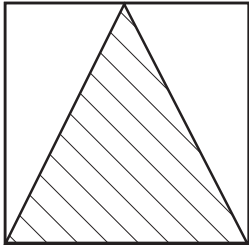
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.8. Несовместные события не образуют полную группу событий, если их вероятности равны ...	1) $P(A) = \frac{5}{6}$; $P(B) = \frac{1}{12}$; $P(C) = \frac{1}{12}$ ☐ 2) $P(A) = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{1}{6}$; $P(C) = \frac{1}{7}$ ☐ 3) $P(A) = \frac{1}{4}$; $P(B) = \frac{1}{8}$; $P(C) = \frac{5}{8}$ ☐ 4) $P(A) = \frac{5}{15}$; $P(B) = \frac{2}{5}$; $P(C) = \frac{4}{15}$ ☐
1.9. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет 3 очка, равна ...	1) 0,5 ☐ 2) 0,1 ☐ 3) $1/6$ ☐ 4) $1/3$ ☐
1.10. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет 5 очков, равна ...	1) $5/6$ ☐ 2) $1/6$ ☐ 3) 0,1 ☐ 4) $1/5$ ☐
1.11. Вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет 1 или 2 или 6 очков, составляет ...	1) 0,5 ☐ 2) $1/3$ ☐ 3) $1/12$ ☐ 4) $1/9$ ☐
1.12. Вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет четное число очков, равна ...	1) $1/12$ ☐ 2) 2 ☐ 3) 12 ☐ 4) $1/2$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.13. Вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет 0 очков, составляет ...	1) 1 ☐ 2) 0 ☐ 3) $1/6$ ☐ 4) $1/12$ ☐
1.14. Вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет 7 очков, составляет ...	1) 0 ☐ 2) $6/7$ ☐ 3) 1 ☐ 4) $7/6$ ☐
1.15. Вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет количество очков не менее 2, но не более 4, составляет ...	1) 9 ☐ 2) $1/2$ ☐ 3) $1/9$ ☐ 4) $1/3$ ☐
1.16. Из урны, в которой находятся 4 белых и 9 черных шаров, вынимают наудачу один шар. Тогда вероятность того, что этот шар будет белым, равна ...	1) $4/13$ ☐ 2) $2/7$ ☐ 3) 1 ☐ 4) $4/9$ ☐
1.17. В ящике 11 белых, 3 красных и 6 синих шаров. Достают один шар. Вероятность, что он белый, равна ...	1) 0,45 ☐ 2) $9/11$ ☐ 3) $1/3$ ☐ 4) 0,55 ☐
1.18. Вероятность того, что 1 сентября произвольно выбранного года придется на воскресенье, равна ...	1) $12/365$ ☐ 4) $1/2$ ☐ 2) $1/7$ ☐ 3) $1/365$ ☐
1.19. Чему равна вероятность того, что день рождения произвольно выбранного студента 30-го числа? Високосными годами пренебречь.	1) $11/365$ ☐ 2) $1/365$ ☐ 3) $12/365$ ☐ 4) $1/7$ ☐
1.20. Из колоды в 36 карт достают одну карту. Чему равна вероятность того, что это валет или дама?	1) $2/9$ ☐ 2) $1/4$ ☐ 3) $1/36$ ☐ 4) $1/9$ ☐
1.21. В ящике 65 годных и 35 бракованных деталей. Достают одну деталь. Чему равна вероятность того, что она бракованная?	1) 0,65 ☐ 2) $7/13$ ☐ 3) 0,5 ☐ 4) 0,35 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.22. За контрольную по математике из тридцати студентов группы пятеро получили оценку «5», 12 студентов — «4», 10 студентов получили тройки, а остальные — двойки. Чему равна вероятность того, что наугад взятый студент группы получил двойку?	1) 0,1 ☐ 2) 0,15 ☐ 3) 0,2 ☐ 4) 0,25 ☐ 5) 0,3 ☐
1.23. Игральная кость бросается один раз. Вероятность того, что появится не более 4 очков, равна ...	1) 1/6 ☐ 2) 1 ☐ 3) 1/2 ☐ 4) 2/3 ☐ 5) 1/3 ☐
1.24. Игральная кость бросается один раз. Вероятность того, что появится более 5 очков, равна ...	1) 1/2 ☐ 2) 2/3 ☐ 3) 1 ☐ 4) 1/3 ☐ 5) 1/6 ☐
1.25. Теорема сложения вероятностей для совместных событий A и B определяется формулой ...	1) $P(A + B) = P(A) + P(B) + P(AB)$ ☐ 2) $P(A + B) = P(AB) - P(A) - P(B)$ ☐ 3) $P(A + B) = P(A) + P(B)$ ☐ 4) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ☐
1.26. Теорема умножения вероятностей для зависимых событий A и B определяется формулой ...	1) $P(AB) = P(A) \cdot P(B) - P(A + B)$ ☐ 2) $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$ ☐ 3) $P(AB) = P(A/B) \cdot P(B/A)$ ☐ 4) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ ☐
1.27. В лотерее 1000 билетов. На 1 билет выпадает выигрыш 5000 руб., на 10 билетов — выигрыши по 1000 руб., на 50 билетов — выигрыши по 200 руб., на 100 билетов — выигрыши по 50 руб.; остальные билеты — проигрышные. Покупается 1 билет. Тогда вероятность выигрыша 50 или 1000 руб. равна ...	1) 0,011 ☐ 2) 0,11 ☐ 3) 11/161 ☐ 4) 11/989 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
1.28. В урне находятся 1 белый и 2 черных шара. Из урны поочередно изымаются шары. После первого изъятия шар возвращается в урну и шары перемешиваются. Тогда вероятность того, что оба шара белые, равна ...	1) $2/3$	☐
	2) $2/9$	☐
	3) $1/6$	☐
	4) $1/9$	☐
1.29. В урне находятся 2 белых и 2 черных шара. Из урны поочередно вынимают 2 шара, но после первого вынимания шар возвращается в урну и шары перемешиваются. Тогда вероятность того, что оба шара белые, равна ...	1) $1/16$	☐
	2) $1/2$	☐
	3) $1/6$	☐
	4) $1/4$	☐
1.30. По оценкам экспертов, вероятности банкротства для двух предприятий, производящих разнотипную продукцию, равны 0,2 и 0,25. Тогда вероятность банкротства обоих предприятий равна ...	1) 0,6	☐
	2) 0,45	☐
	3) 0,05	☐
	4) 0,5	☐
1.31. В цехе работают 5 женщин и 2 мужчины. Для беседы по жребию выбирают двоих. Тогда вероятность того, что это мужчина и женщина, равна ...	1) $7/10$	☐
	2) $10/21$	☐
	3) $1/10$	☐
	4) $5/21$	☐
1.32. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Чему равна вероятность того, что при трех выстрелах не будет ни одного промаха?	1) 0,49	☐
	2) 0,049	☐
	3) 0,21	☐
	4) 0,343	☐
1.33. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Чему равна вероятность того, что при двух выстрелах не будет ни одного промаха?	1) $3/9$	☐
	2) 0,16	☐
	3) 0,36	☐
	4) 0,24	☐
1.34. В ящике 25 деталей, из которых 9 бракованных. Сборщик наугад достает 3 детали. Какова вероятность того, что все три небракованные?	1) $28/115$	☐
	2) $8/23$	☐
	3) $16/91$	☐
	4) $40/133$	☐
1.35. В одном ящике 2 белых и 8 красных шаров, а в другом 4 белых и 6 красных. Из каждого ящика наугад вынимают по 1 шару. Какова вероятность того, что они оба красные?	1) 0,92	☐
	2) 0,48	☐
	3) 0,36	☐
	4) 0,3	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.36. В одном ящике 20 белых и 10 красных шаров, а в другом 15 белых и 15 красных. Из каждого ящика наугад вынимают по 1 шару. Какова вероятность того, что хотя бы один из них белый?	1) 0,7 ☐ 2) 0,64 ☐ 3) 7/8 ☐ 4) 5/6 ☐
1.37. Из карточек разрезной азбуки сложено слово «алгебра». Из этого слова наугад берут 2 карточки. Какова вероятность того, что на них нет ни буквы «а», ни буквы «е»?	1) 3/4 ☐ 2) 4/7 ☐ 3) 2/7 ☐ 4) 1/2 ☐
1.38. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 наугад выбирают 3 цифры. Какова вероятность того, что они все нечетные?	1) 1/2 ☐ 2) 1/14 ☐ 3) 3/14 ☐ 4) 1/6 ☐
1.39. В ящике 17 годных и 8 бракованных деталей. Из него наугад достают 2 детали. Какова вероятность того, что они обе бракованные?	1) 7/90 ☐ 2) 0,1 ☐ 3) 7/75 ☐ 4) 0,14 ☐
1.40. В урне 10 красных, 20 синих и 15 зеленых шаров. Из нее наугад достают 1 шар. Какова вероятность того, что этот шар синий, если известно, что он не зеленый?	1) 0,075 ☐ 2) 0,25 ☐ 3) 2/3 ☐ 4) 0,2 ☐
1.41. В урне 21 белый и 19 черных шаров. Из урны вынимают сразу 2 шара. Вероятность того, что оба шара будут белыми, равна ...	1) 1/2 ☐ 2) 7/26 ☐ 3) 1/4 ☐ 4) 19/80 ☐ 5) 13/51 ☐
1.42. В урне 21 белый и 19 черных шаров. Из урны вынимают сразу 2 шара. Вероятность того, что шары разного цвета, равна ...	1) 8/17 ☐ 2) 41/80 ☐ 3) 3/5 ☐ 4) 24/51 ☐ 5) 133/260 ☐
1.43. Случайные события A и B , удовлетворяющие условиям $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$; $P(AB) = 0,2$ являются ...	1) несовместными и зависимыми ☐ 2) совместными и зависимыми ☐ 3) совместными и независимыми ☐ 4) несовместными и независимыми ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.44. Из каждой из двух колод вынимают по одной карте. События A — «карта из первой колоды красной масти» и B — «карта из второй колоды бубновой масти» являются ...	1) несовместными и зависимыми ☐ 2) совместными и зависимыми ☐ 3) совместными и независимыми ☐ 4) несовместными и независимыми ☐
1.45. Бросают 2 кубика. События A — «на первом кубике выпала тройка» и B — «на втором кубике выпала шестерка» являются ...	1) несовместными и зависимыми ☐ 2) совместными и зависимыми ☐ 3) совместными и независимыми ☐ 4) несовместными и независимыми ☐
1.46. При бросании точки на плоскость достоверно ее попадание в круг площадью S; попадание в любую точку круга равновероятно. Вероятность $p(A)$ ее попадания в концентрический круг площади s равна ...	1) $p(A) = 1 - \frac{s}{S}$ ☐ 2) $p(A) = S - s$ ☐ 3) $p(A) = \frac{s}{S}$ ☐ 4) $p(A) = \sqrt{\frac{s}{S}}$ ☐
1.47. В квадрат со стороной 13 брошена точка.  Тогда вероятность того, что она попадет в заштрихованную область, равна ...	1) $1/13$ ☐ 2) $1/2$ ☐ 3) $2/13$ ☐ 4) 2 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.48. A — случайное событие, H_1 и H_2 образуют полную группу событий. Верным является утверждение ...	1) $p(A) = p(A/H_1) + p(A/H_2)$ ☐ 2) $p(A) = 1 - p(A/H_1) + p(A/H_2)$ ☐ 3) $p(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2)$ ☐ 4) $p(A) = p(A/H_1) \times p(A/H_2)$ ☐
1.49. Событие A может наступить лишь при условии появления двух несовместных событий B_1 и B_2 , образующих полную группу событий. Известны: вероятность $P(B_1) = \frac{3}{4}$, условные вероятности $P(A / B_1) = \frac{1}{4}$ и $P(A / B_2) = \frac{1}{2}$. Тогда вероятность $P(A)$ равна ...	1) $3/16$ ☐ 2) $3/4$ ☐ 3) $1/4$ ☐ 4) $5/16$ ☐
1.50. По мишени производится три выстрела. Значение вероятности ни одного попадания при всех трех выстрелах равно 0,5; значение вероятности ровно одного попадания 0,3; значение вероятности ровно двух попаданий 0,15. Тогда значение вероятности того, что мишень будет поражена три раза, равно ...	1) 0,05 ☐ 2) 0,95 ☐ 3) 0,15 ☐ 4) 0,45 ☐
1.51. По мишени производится три выстрела. Значение вероятности ни одного попадания при всех трех выстрелах равно 0,6; значение вероятности ровно одного попадания 0,2; значение вероятности ровно двух попаданий 0,1. Тогда значение вероятности того, что мишень будет поражена не более одного раза, равно ...	1) 0,6 ☐ 2) 0,7 ☐ 3) 0,8 ☐ 4) 0,2 ☐
1.52. Имеются две одинаковые на вид урны. В первой урне находятся 4 красных и 3 черных шара. Во второй урне — 2 белых и 1 черный шар. Из наудачу взятой урны вынимают 1 шар. Тогда вероятность того, что этот шар черный, равна ...	1) $1/7$ ☐ 2) $8/21$ ☐ 3) $2/5$ ☐ 4) $1/3$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.53. Имеются две одинаковые на вид урны. В первой урне находятся 3 белых и 2 черных шара. Во второй урне — 4 белых, 1 черный шар и 1 красный шар. Из наудачу взятой урны вынимают 1 шар. Тогда вероятность того, что этот шар белый, равна ...	1) $19/30$ ☐ 2) $2/5$ ☐ 3) $8/15$ ☐ 4) $7/11$ ☐
1.54. В первой урне 4 черных и 6 белых шаров. Во второй урне 3 белых и 7 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынимают 1 шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна ...	1) 0,9 ☐ 2) 0,45 ☐ 3) 0,4 ☐ 4) 0,15 ☐
1.55. В первом ящике 7 красных и 9 синих шаров, а во втором — 4 красных и 11 синих. Из произвольного ящика достают 1 шар. Вероятность того, что он синий, равна ...	1) $\frac{1}{2} \left(\frac{9}{16} + \frac{11}{15} \right)$ ☐ 2) $\frac{1}{2} \left(\frac{7}{9} + \frac{4}{11} \right)$ ☐ 3) $\frac{9}{16} + \frac{11}{15}$ ☐ 4) $\frac{9}{16} \cdot \frac{11}{15}$ ☐
1.56. С первого станка на сборку поступает 45%, а со второго — 55% всех деталей. Среди деталей с первого станка 90% стандартных, а со второго — 80%. Тогда вероятность того, что наугад взятая деталь окажется нестандартной, равна ...	1) 0,135 ☐ 2) 0,155 ☐ 3) 0,215 ☐ 4) 0,225 ☐
1.57. В урне лежат 3 белых и 2 черных шара. Последовательно без возвращения и наудачу извлекают 3 шара. Тогда вероятность того, что первый шар будет белым, а второй и третий — черными, равна ...	1) $1/10$ ☐ 2) $6/125$ ☐ 3) $8/27$ ☐ 4) $12/125$ ☐
1.58. В урне лежат 2 белых и 3 черных шара. Последовательно без возвращения и наудачу извлекают 3 шара. Тогда вероятность того, что первый и второй шары будут белыми, а третий — черным, равна ...	1) $12/125$ ☐ 2) $1/10$ ☐ 3) $18/25$ ☐ 4) $1/5$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.59. На сборку поступили одинаковые детали из трех цехов: из цеха № 1 — 100 деталей, из цеха № 2 — 200 деталей и из цеха № 3 — 700 деталей. Известно, что в цехе № 1 2% изготавливаемых деталей бракованные, в цехе № 2 — 3% и в цехе № 3 — 1%. Вероятность того, что наугад взятая сборщиком деталь бракованная, равна ...	1) 0,015 ☐ 2) 0,022 ☐ 3) 0,011 ☐ 4) 0,013 ☐
1.60. В магазин поступает продукция трех фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 10%, второй — 40% и третьей — 50% изделий. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 1%, для второй — 3% и для третьей — 5%. Вероятность того, что оказавшееся нестандартным изделие произведено на третьей фабрике, равна ...	1) 17/23 ☐ 2) 12/29 ☐ 3) 25/38 ☐ 4) 1/3 ☐ 5) 3/5 ☐
1.61. С первого автомата на сборку поступает 25%, со второго — 30%, с третьего — 45% деталей. Первый автомат дает в среднем 0,1% брака, второй — 0,4%, третий — 0,2%. Вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь изготовлена на втором автомате, равна ...	1) 4/9 ☐ 2) 24/47 ☐ 3) 12/23 ☐ 4) 6/13 ☐ 5) 47/91 ☐
1.62. На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит 15%, вторая — 25%, третья — 60% всех изделий. Брак продукции составляет соответственно 2, 4 и 5%. Вероятность того, что оказавшийся бракованным болт произведен на первой машине, равна ...	1) 5/61 ☐ 2) 2/27 ☐ 3) 1/30 ☐ 4) 14/259 ☐ 5) 3/43 ☐
1.63. В магазин поступает продукция трех фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 10%, второй — 15% и третьей — 75% изделий. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 2%, для второй — 5% и для третьей — 1%. Вероятность того, что оказавшееся нестандартным изделие произведено на первой фабрике, равна ...	1) 9/23 ☐ 2) 2/17 ☐ 3) 7/46 ☐ 4) 5/29 ☐ 5) 1/3 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.64. В магазин поступает продукция трех фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 30%, второй — 50% и третьей — 20% изделий. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 4%, для второй — 1% и для третьей — 5%. Вероятность того, что оказавшееся нестандартным изделие произведено на второй фабрике, равна ...	1) $7/18$ ☐ 2) $1/5$ ☐ 3) $6/23$ ☐ 4) $5/27$ ☐ 5) $3/11$ ☐
1.65. Игральную кость бросают 8 раз. Вероятность того, что ровно 4 раза выпадет грань с четным числом очков, равна ...	1) $1/256$ ☐ 2) $35/128$ ☐ 3) $27/128$ ☐ 4) $1/8$ ☐
1.66. Игральную кость бросают 5 раз. Вероятность того, что ровно 2 раза выпадет грань с четным числом очков, равна ...	1) $5/16$ ☐ 2) $1/32$ ☐ 3) $7/64$ ☐ 4) $1/4$ ☐
1.67. Вероятность покупки неспелого арбуза на рынке равна 0,2. Некто каждый день покупает на рынке арбуз. Какова вероятность того, что в течение четырех дней он купит не менее 3 спелых арбузов?	1) 0,6354 ☐ 2) 0,7248 ☐ 3) 0,8192 ☐ 4) 0,8576 ☐
1.68. Вероятность попадания стрелка в цель равна 0,9. Вероятность того, что из четырех выстрелов он попадет в цель 2 раза, равна ...	1) 0,0512 ☐ 2) 0,0240 ☐ 3) 0,0486 ☐ 4) 0,0832 ☐
1.69. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна $\frac{1}{3}$. Тогда вероятность того, что при 4 выстрелах будет хотя бы одно попадание, равна ...	1) $3/4$ ☐ 2) $65/81$ ☐ 3) $16/81$ ☐ 4) $2/3$ ☐
1.70. Что нужно применить для вычисления вероятности того, что в 200 повторных независимых испытаниях событие A произойдет 60 раз, если вероятность события A в отдельном испытании 0,4?	1) Формулу Бернулли ☐ 2) Фокальную теорему Лапласа ☐ 3) Формулу Пуассона ☐ 4) Интегральную теорему Лапласа ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.71. Число размещений из n по k определяется по формуле ...	1) $A_n^k = \frac{k!}{n!}$ ☐ 2) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ ☐ 3) $A_n^k = \frac{n!}{k!}$ ☐ 4) $A_n^k = (n-k)!$ ☐
1.72. Число сочетаний из n по k определяется по формуле ...	1) $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ ☐ 2) $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ ☐ 3) $C_n^k = \frac{n!}{k!}$ ☐ 4) $C_n^k = k! \cdot (n-k)!$ ☐
1.73. Сколько прямых можно провести через 6 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой так, чтобы каждая прямая проходила через две из заданных точек?	1) $6!$ ☐ 2) $\frac{6!}{2!}$ ☐ 3) $\frac{6!}{3!3!}$ ☐ 4) $\frac{6!}{4!2!}$ ☐ 5) $\frac{6!}{3!}$ ☐
1.74. В пространстве даны 9 точек, причем никакие 4 из них не лежат в одной плоскости. Сколько различных плоскостей можно провести через эти 9 точек так, чтобы каждая плоскость проходила через три из заданных точек?	1) $\frac{9!}{6!3!}$ ☐ 2) $4!$ ☐ 3) $\frac{9!}{4!5!}$ ☐ 4) $3!$ ☐ 5) $\frac{9!}{3!}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.75. Сколько различных восьмизначных чисел, начинающихся цифрой 3 и оканчивающихся цифрой 7, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 при условии, что каждая цифра в обозначении числа встречается 1 раз?	1) $8!$ ☐ 2) $\frac{6!}{4!2!}$ ☐ 3) $\frac{8!}{4!}$ ☐ 4) $\frac{6!}{2!}$ ☐ 5) $6!$ ☐
1.76. Сколько различных правильных дробей можно составить из чисел 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19?	1) $\frac{9!}{7!}$ ☐ 2) $\frac{9!}{7!2!}$ ☐ 3) $9!$ ☐ 4) $\frac{9!}{2!}$ ☐ 5) $\frac{9!}{3!4!}$ ☐
1.77. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 при условии, что каждая цифра в обозначении числа встречается 1 раз?	1) $\frac{8!}{4!}$ ☐ 2) $\frac{8!}{4!4!}$ ☐ 3) $4!$ ☐ 4) $6!$ ☐ 5) $8!$ ☐
1.78. Количество способов, которыми можно расставить 6 различных книг на полке, равно ...	1) 1024 ☐ 2) 216 ☐ 3) 12 ☐ 4) 720 ☐ 5) 36 ☐
1.79. Количество способов, которыми можно выбрать для дежурства 3 студентов из 9, равно ...	1) 78 ☐ 2) 91 ☐ 3) 84 ☐ 4) 80 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
Часть 2. Вопросы к главе 2 «Случайные величины»	
2.1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем x , — это ...	1) плотность распределения ☐ 2) функция распределения ☐ 3) мода распределения ☐ 4) медиана распределения ☐
2.2. Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины X , то $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \dots$	1) 1 ☐ 2) $+\infty$ ☐ 3) 0 ☐ 4) 0,5 ☐
2.3. Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины X , то $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \dots$	1) 1 ☐ 2) $+\infty$ ☐ 3) 0 ☐ 4) 0,5 ☐
2.4. Если $F(x)$ — функция распределения, $f(x)$ — плотность распределения случайной величины X , то ...	1) $f(x) = F'(x)$ ☐ 2) $f(x) = F(x) - F(0)$ ☐ 3) $f(x) =$ $= 0,5 \cdot [F(x_{+\infty}) - F(0)]$ ☐ 4) $f(x) = \int_{-\infty} F(x) dx$ ☐
2.5. Если $f(x)$ — плотность распределения случайной величины X , то $\int_{-\infty} f(x) dx = \dots$	1) $+\infty$ ☐ 2) 0 ☐ 3) 0,5 ☐ 4) 1 ☐
2.6. В какой полуплоскости координатной плоскости лежит кривая распределения любой случайной величины?	1) Верхней ☐ 2) Нижней ☐ 3)левой ☐ 4) Правой ☐
2.7. По какой формуле вычисляется математическое ожидание дискретной случайной величины X , заданной рядом распределения?	1) $MX = p_1 + p_2 + \dots p_n$ ☐ 2) $MX = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$ ☐ 3) $MX = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ ☐ 4) $MX = x_1 + x_2 + \dots x_n$ ☐

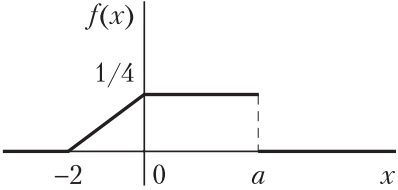
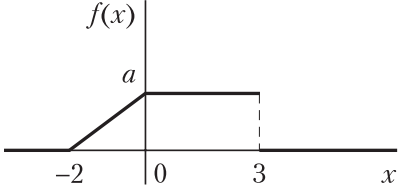
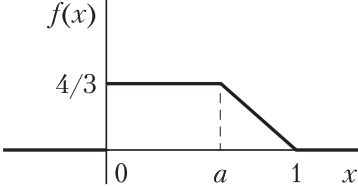
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа										
2.8. По какой формуле вычисляется математическое ожидание непрерывной случайной величины X , заданной плотностью распределения $f(x)$?	1) $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ ☐ 2) $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx$ ☐ 3) $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ ☐ 4) $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ ☐										
2.9. Упрощенная формула вычисления дисперсии случайной величины X имеет вид ...	1) $DX = M(X^2) - 2MX$ ☐ 2) $DX = M(X^2) - (MX)^2$ ☐ 3) $DX = MX - \sqrt{MX}$ ☐ 4) $DX = M(X^2) - MX$ ☐										
2.10. Среднее квадратическое отклонение σ_X случайной величины X определяется по формуле ...	1) $\sigma_X = 0,5 \cdot DX$ ☐ 2) $\sigma_X = \sqrt{DX}$ ☐ 3) $\sigma_X = \frac{DX}{MX}$ ☐ 4) $\sigma_X = DX - MX$ ☐										
2.11. Дан закон распределения дискретной случайной величины X <table border="1"><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,1</td><td>a</td><td>0,2</td><td>0,6</td></tr></table> Тогда значение a равно ...	x_i	1	2	3	4	p_i	0,1	a	0,2	0,6	1) 0,1 ☐ 2) -0,9 ☐ 3) 0,2 ☐ 4) 0,9 ☐
x_i	1	2	3	4							
p_i	0,1	a	0,2	0,6							
2.12. Дан закон распределения дискретной случайной величины X <table border="1"><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,2</td><td>a</td><td>0,4</td><td>0,1</td></tr></table> Тогда значение a равно ...	x_i	1	2	3	4	p_i	0,2	a	0,4	0,1	1) 0,4 ☐ 2) 0,3 ☐ 3) -0,7 ☐ 4) 0,7 ☐
x_i	1	2	3	4							
p_i	0,2	a	0,4	0,1							

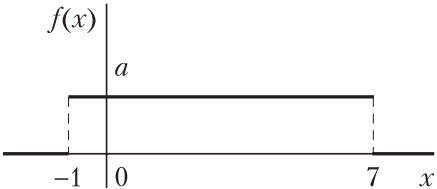
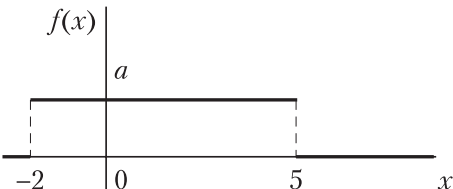
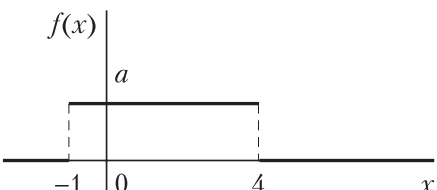
Задание					Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
2.13. Дан закон распределения дискретной случайной величины X					1) 0,2	☐
x_i	1	2	3	4	2) 0,7	☐
p_i	0,2	0,3	0,4	a	3) -0,7	☐
Тогда значение a равно ...					4) 0,1	☐
2.14. Дискретная случайная величина задана законом распределения. Тогда значение функции распределения $F(3)$ равно ...					1) 0,7	☐
x_i	1	2	4	5	2) 0,2	☐
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4	3) 0,9	☐
2.15. Дискретная случайная величина задана законом распределения. Тогда значение функции распределения $F(0)$ равно ...					4) 0,3	☐
x_i	-2	-1	1	4	1) 0,4	☐
p_i	0,3	0,3	0,3	0,1	2) 0,9	☐
2.16. Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Найти MX .					3) 0,6	☐
x_i	-3	-1	0	1	4) 0,3	☐
p_i	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3	☐
2.17. Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Найти MX .					1) -0,1	☐
x_i	2	4	6	8	2) 0,1	☐
p_i	0,5	0,2	0,1	0,1	3) 0,3	☐
2.18. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения. Найти DX .					4) 0,5	☐
x_i	1	2	3	4	1) 3,8	☐
p_i	0,4	0,2	0,2	0,1	2) 4,2	☐
					3) 4,4	☐
					4) 4,6	☐
					1) 1,33	☐
					2) 1,62	☐
					3) 1,81	☐
					4) 1,96	☐

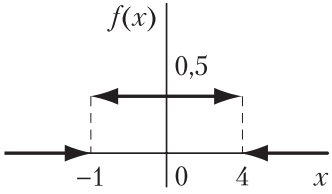
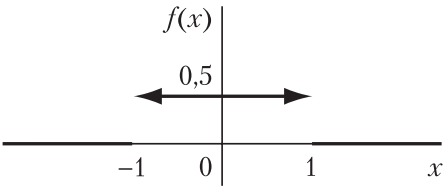
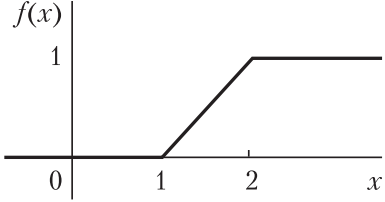
Задание						Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа		
2.19. Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Найти $M(X)$.						1) 7,6	☐	
x_i	6	7	8	9	10	2) 7,4	☐	
p_i	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1	3) 7,2	☐	
						4) 6,8	☐	
2.20. Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Найти MX .						1) 7,5	☐	
x_i	0	5	10	15	25	2) 8	☐	
p_i	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1	3) 8,5	☐	
						4) 9	☐	
2.21. Распределение дискретной случайной величины задано таблицей. Математическое ожидание равно ...						1) 4,9	☐	
x_i	3	6	7				2) 5,2	☐
p_i	0,1	0,5	0,4				3) 5,7	☐
						4) 6,1	☐	
2.22. Распределение дискретной случайной величины задано таблицей. Дисперсия равна ...						1) 3,69	☐	
x_i	2	5	8				2) 5,49	☐
p_i	0,2	0,3	0,5				3) 7,81	☐
						4) 9,33	☐	
2.23. Распределение дискретной случайной величины задано таблицей. Математическое ожидание равно ...						1) 4,5	☐	
x_i	-1	-2	5				2) 3,5	☐
p_i	0,1	0,2	0,7				3) 3	☐
						4) 2	☐	
2.24. Распределение дискретной случайной величины задано таблицей. Математическое ожидание равно ...						1) 9,3	☐	
x_i	1	10	15				2) 10,1	☐
p_i	0,3	0,3	0,4				3) 10,9	☐
						4) 11,3	☐	
2.25. Дискретная случайная величина задана законом распределения. Тогда ее математическое ожидание равно 3,3, если ...						1) $a = 0,1; b = 0,9$	☐	
x_i	-1	2	4				2) $a = 0,2; b = 0,7$	☐
p_i	0,1	a	b				3) $a = 0,8; b = 0,1$	☐
						4) $a = 0,1; b = 0,8$	☐	

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.26. Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины X имеет вид $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ 0,2, & 2 < x \leq 4; \\ 0,7, & 4 < x \leq 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$ Тогда вероятность $P(3 \leq X \leq 6)$ равна ...	1) 0,2 ☐ 2) 0,9 ☐ 3) 0,7 ☐ 4) 0,8 ☐
2.27. Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины X имеет вид $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3; \\ 0,2, & 3 < x \leq 4; \\ 0,6, & 4 < x \leq 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$ Тогда вероятность $P(2 \leq X \leq 5)$ равна ...	1) 0,8 ☐ 2) 0,6 ☐ 3) 0,4 ☐ 4) 0,2 ☐
2.28. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} C, & x \leq 2; \\ 2x - 4, & 2 < x \leq 2,5; \\ 1, & x > 2,5. \end{cases}$ Тогда значение C равно ...	1) 2,25 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 0,5 ☐
2.29. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ 1 - x^2, & -1 < x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ Тогда значение дифференциальной функции (плотности) распределения этой случайной величины в точке $x = -\frac{1}{2}$ равно ...	1) 0,5 ☐ 2) 0,75 ☐ 3) 1 ☐ 4) 0,25 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.30. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$ Тогда вероятность того, что эта случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(2; 4)$, равна ...	1) $\frac{4}{9}$ ☐ 2) $\frac{5}{9}$ ☐ 3) $\frac{2}{9}$ ☐ 4) $\frac{1}{2}$ ☐
2.31. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3; \\ x - 3, & 3 \leq x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$ Чему равна вероятность события $X < 3,6$?	1) 0,2 ☐ 2) 0,3 ☐ 3) 0,5 ☐ 4) 0,6 ☐
2.32. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3; \\ x - 3, & 3 \leq x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$ Чему равна вероятность события $3,1 < X < 4,5$?	1) 0,9 ☐ 2) 0,7 ☐ 3) 0,5 ☐ 4) 0,3 ☐
2.33. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3; \\ x - 3, & 3 \leq x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$ Найти MX.	1) 3,2 ☐ 2) 3,5 ☐ 3) 3,6 ☐ 4) 3,8 ☐
2.34. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3; \\ x - 3, & 3 \leq x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$ Найти DX.	1) $1/3$ ☐ 2) $1/4$ ☐ 3) $1/6$ ☐ 4) $1/12$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.35. График плотности распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины приведен на рисунке.  Тогда значение a равно ...	1) 6 ☐ 2) 3 ☐ 3) 5 ☐ 4) 4 ☐
2.36. График плотности распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины приведен на рисунке.  Тогда значение a равно ...	1) 0,4 ☐ 2) 0,75 ☐ 3) 0,5 ☐ 4) 0,25 ☐
2.37. График плотности распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины приведен на рисунке.  Тогда значение a равно ...	1) 0,5 ☐ 2) 0,6 ☐ 3) 0,75 ☐ 4) 0,7 ☐
Часть 3. Вопросы к главе 3 «Основные законы распределения»	
3.1. По какой формуле определяется математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$?	1) $MX = \frac{a+b}{2}$ ☐ 2) $MX = \frac{a+b}{12}$ ☐ 3) $MX = \frac{b-a}{2}$ ☐ 4) $MX = b-a$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.2. По какой формуле определяется дисперсия случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$?	1) $DX = \frac{b-a}{2}$ ☐ 2) $DX = \frac{(b-a)^2}{2}$ ☐ 3) $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$ ☐ 4) $DX = (b-a)^2$ ☐
3.3. График плотности распределения непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(-1; 7)$, имеет вид:  Тогда значение a равно ...	1) 1 ☐ 2) 1/6 ☐ 3) 1/7 ☐ 4) 1/8 ☐
3.4. График плотности распределения непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(-2; 5)$, имеет вид:  Тогда значение a равно ...	1) 1 ☐ 2) 1/5 ☐ 3) 1/7 ☐ 4) 1/3 ☐
3.5. График плотности распределения непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(-1; 4)$, имеет вид:  Тогда значение a равно ...	1) 0,2 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0,25 ☐ 4) 0,33 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.6. Если график плотности распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид:  то $D(6X + 5) = \dots$	1) 9 ☐ 2) 6 ☐ 3) 21 ☐ 4) 12 ☐ 5) 15 ☐
3.7. График плотности распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид:  Тогда $M(2X + 7) = \dots$	1) 11 ☐ 2) 0 ☐ 3) 7 ☐ 4) -1 ☐ 5) 1 ☐
3.8. Если график функции распределения случайной величины X имеет вид:  то $M(4X) = \dots$	1) 4 ☐ 2) 5 ☐ 3) 6 ☐ 4) 8 ☐ 5) 9 ☐
3.9. Непрерывная случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1; 5]$. Найти DX.	1) 3 ☐ 2) 2 ☐ 3) 1 ☐ 4) 0,75 ☐
3.10. Случайная величина распределена равномерно на интервале $(0; 6)$. Тогда ее математическое ожидание и дисперсия соответственно равны ...	1) 4 и $\frac{4}{3}$ ☐ 2) 2 и 3 ☐ 3) 3 и 3 ☐ 4) 3 и 2 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.11. По какой формуле определяется плотность распределения $f(x)$ случайной величины X , распределенной по показательному закону, при $x \geq 0$?	1) $f(x) = 1 - \lambda e^{-\lambda x}$ ☐ 2) $f(x) = e^{-\lambda x}$ ☐ 3) $f(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ☐ 4) $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ☐
3.12. По какой формуле определяется функция распределения $F(x)$ случайной величины X , распределенной по показательному закону, при $x \geq 0$?	1) $F(x) = 1 - \lambda e^{-\lambda x}$ ☐ 2) $F(x) = e^{-\lambda x}$ ☐ 3) $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ☐ 4) $F(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ☐
3.13. По какой формуле определяется математическое ожидание MX случайной величины X , распределенной по показательному закону?	1) $MX = \frac{1}{\lambda^2}$ ☐ 2) $MX = \frac{1}{\lambda}$ ☐ 3) $MX = e^{-\lambda}$ ☐ 4) $MX = 1 - e^{-\lambda}$ ☐
3.14. По какой формуле определяется дисперсия DX случайной величины X , распределенной по показательному закону?	1) $DX = \frac{1}{\lambda^2}$ ☐ 2) $DX = \frac{1}{\lambda}$ ☐ 3) $DX = e^{-\lambda}$ ☐ 4) $DX = 1 - e^{-\lambda}$ ☐
3.15. По какой формуле определяется плотность распределения $f(x)$ случайной величины X , распределенной по нормальному закону?	1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$ ☐ 2) $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ ☐ 3) $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$ ☐ 4) $f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.16. Чему равно математическое ожидание случайной величины X, распределенной по нормальному закону с плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} ?$	1) a ☐ 2) e ☐ 3) σ ☐ 4) σ^2 ☐ 5) $\sqrt{2\pi}$ ☐
3.17. Чему равна дисперсия случайной величины X, распределенной по нормальному закону с плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} ?$	1) a ☐ 2) e ☐ 3) σ ☐ 4) σ^2 ☐ 5) $\sqrt{2\pi}$ ☐
3.18. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей: $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}.$ Тогда математическое ожидание этой нормально распределенной случайной величины равно ...	1) 18 ☐ 2) 4 ☐ 3) 3 ☐ 4) 9 ☐
3.19. Если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}, \text{ то } D(2X + 1) = \dots$	1) 8 ☐ 2) 15 ☐ 3) 16 ☐ 4) 36 ☐ 5) 27 ☐
3.20. Если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}, \text{ то } M(4X + 7) = \dots$	1) 8 ☐ 2) 15 ☐ 3) 16 ☐ 4) 36 ☐ 5) 27 ☐
3.21. Если X — нормально распределенная случайная величина, у которой $a = 4; \sigma = 3, \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ то}$ вероятность неравенства $1 < X < 13$ равна ...	1) $0,5 \cdot [\Phi(3) - \Phi(1)]$ ☐ 2) $0,5 \cdot \Phi(3)$ ☐ 3) $0,5 \cdot \Phi(1)$ ☐ 4) $0,5 \cdot [\Phi(3) + \Phi(1)]$ ☐ 5) $\Phi(3)$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.22. Если X — нормально распределенная случайная величина, у которой $a = 5$; $\sigma = 2$, $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, то вероятность неравенства $4 < X < 6$ равна ...	2) $0,5 \cdot \Phi(0,5)$ ☐ 3) $\Phi(0,5)$ ☐ 4) $\Phi(1)$ ☐ 5) $0,5 \cdot \Phi(1)$ ☐ 1) $0,5 \cdot [\Phi(1) - \Phi(0,5)]$ ☐
3.23. Если X — нормально распределенная случайная величина, у которой $a = 8$; $\sigma = 3$, $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, то вероятность неравенства $11 < X < 14$ равна ...	1) $0,5 \cdot [\Phi(2) + \Phi(1)]$ ☐ 2) $\Phi(2)$ ☐ 3) $\Phi(1)$ ☐ 4) $0,5 \cdot [\Phi(2) - \Phi(1)]$ ☐ 5) $0,5 \cdot \Phi(2)$ ☐
3.24. Если X — нормально распределенная случайная величина, у которой $a = 4$; $\sigma = 3$, $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, то вероятность неравенства $4 < X < 10$ равна ...	1) $0,5 \cdot \Phi(2)$ ☐ 2) $0,5 \cdot [\Phi(2) - \Phi(1)]$ ☐ 3) $0,5 \cdot \Phi(1)$ ☐ 4) $\Phi(2)$ ☐ 5) $\Phi(1)$ ☐
3.25. Вероятность появления события A в 20 повторных независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,85. Тогда математическое ожидание числа появлений этого события равно ...	1) 2,55 ☐ 2) 16,15 ☐ 3) 3 ☐ 4) 17 ☐
3.26. Вероятность появления события A в 20 повторных независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,7. Тогда математическое ожидание числа появлений этого события равно ...	1) 4,2 ☐ 2) 6 ☐ 3) 14 ☐ 4) 13,3 ☐
3.27. Вероятность годного изделия 0,5. Чему приближенно равна вероятность, что в партии из 400 изделий число годных лежит в пределах от 180 до 220?	1) $0,5 \cdot [\Phi(1,5) + \Phi(1)]$ ☐ 2) $0,5 \cdot [\Phi(2) - \Phi(1)]$ ☐ 3) $\Phi(1,5)$ ☐ 4) $\Phi(2)$ ☐ 5) $0,5 \cdot \Phi(2)$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.28. Неравенство Маркова имеет вид ...	1) $P(X < \xi) \leq 1 - \frac{MX}{\xi}$ ☐ 2) $P(X < \xi) \geq 1 - \frac{MX}{\xi}$ ☐ 3) $P(X < \xi) = 1 - \frac{MX}{\xi}$ ☐ 4) $P(X = \xi) \geq 1 - \frac{MX}{\xi}$ ☐
3.29. Наиболее общим случаем закона больших чисел является теорема ...	1) Муавра — Лапласа ☐ 2) Чебышева ☐ 3) Маркова ☐ 4) Ляпунова ☐
Часть 4. Вопросы к главе 7 «Элементы теории массового обслуживания»	
4.1. Если в любой момент времени вероятностные характеристики случайного процесса в будущем зависят только от состояния системы в данный момент, то случайный процесс называется ...	1) марковский ☐ 2) гауссовский ☐ 3) колмогоровский ☐ 4) чебышевский ☐
4.2. Если вероятность попадания на малый промежуток времени двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события, то поток событий называется ...	1) без последействия ☐ 2) случайный ☐ 3) ординарный ☐ 4) стационарный ☐
4.3. Сколько состояний имеет одноканальная СМО с отказами?	1) ∞ ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
4.4. Если λ — интенсивность потока заявок, а μ — интенсивность потока обслуживания канала, то относительная пропускная способность одноканальной СМО с отказами равна ...	1) $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$ ☐ 2) $\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}$ ☐ 3) $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ ☐ 4) $\frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
4.5. Если λ — интенсивность потока заявок, а μ — интенсивность потока обслуживания канала, то вероятность отказа одноканальной СМО с отказами равна ...	1) $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$ ☐ 2) $\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}$ ☐ 3) $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ ☐ 4) $\frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$ ☐
4.6. Если λ — интенсивность потока заявок, а μ — интенсивность потока обслуживания канала, то абсолютная пропускная способность одноканальной СМО с отказами равна ...	1) $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$ ☐ 2) $\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}$ ☐ 3) $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ ☐ 4) $\frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$ ☐
4.7. Относительная пропускная способность многоканальной СМО с отказами, имеющей n каналов, равна ...	1) $1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$ ☐ 2) $\frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$ ☐ 3) $\rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 \right)$ ☐ 4) $\left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
4.8. Вероятность отказа многоканальной СМО с отказами, имеющей n каналов, равна ...	1) $1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$ ☐ 2) $\frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$ ☐ 3) $\rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right)$ ☐ 4) $\left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$ ☐
4.9. Вероятность того, что все каналы свободны, в многоканальной СМО с отказами, имеющей n каналов, равна ...	1) $1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$ ☐ 2) $\frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$ ☐ 3) $\rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right)$ ☐ 4) $\left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$ ☐
4.10. Среднее число занятых каналов в многоканальной СМО с отказами, имеющей n каналов, равно ...	1) $1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$ ☐ 2) $\frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$ ☐ 3) $\rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right)$ ☐ 4) $\left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
4.11. Сколько состояний имеет одноканальная СМО с ожиданием?	1) ∞ ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
4.12. Среднее число заявок в одноканальной СМО с ожиданием определяется по формуле ...	1) $L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho}$ ☐ 2) $L_{\text{сист}} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$ ☐ 3) $L_{\text{сист}} = 1-\rho$ ☐ 4) $L_{\text{сист}} = \frac{1}{1-\rho}$ ☐
4.13. Найти относительную пропускную способность одноканальной системы массового обслуживания с отказами, если интенсивность входящего потока заявок равна 80 заявок/ч, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки 3 мин.	1) 0,8 ☐ 2) 0,6 ☐ 3) 0,25 ☐ 4) 0,2 ☐
4.14. Найти относительную пропускную способность одноканальной системы массового обслуживания с отказами, если интенсивность входящего потока заявок равна 40 заявок/ч, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки 1 мин.	1) 0,8 ☐ 2) 0,6 ☐ 3) 0,25 ☐ 4) 0,2 ☐
4.15. Найти относительную пропускную способность одноканальной системы массового обслуживания с отказами, если интенсивность входящего потока заявок равна 20 заявок/ч, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки 0,75 мин.	1) 0,8 ☐ 2) 0,6 ☐ 3) 0,25 ☐ 4) 0,2 ☐

ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ ТЕСТОВ

Правильный ответ № 1 в вопросах №: 1.2, 1.11, 1.14, 1.16, 1.17, 1.19, 1.20, 1.22, 1.34, 1.50, 1.53, 1.55, 1.57, 1.59, 1.66, 1.72, 1.74, 1.77, 2.3, 2.4, 2.6, 2.11, 2.19, 2.24, 2.32, 2.37, 3.1, 3.5, 3.9, 3.14, 3.16, 3.24, 4.1, 4.4, 4.7, 4.11, 4.12, 4.15.

Правильный ответ № 2 в вопросах №: 1.8, 1.10, 1.13, 1.15, 1.26, 1.27, 1.31, 1.35, 1.38, 1.41, 1.43, 1.47, 1.52, 1.54, 1.56, 1.58, 1.61, 1.63, 1.65, 1.69, 1.70, 1.71, 1.76, 2.1, 2.9, 2.10, 2.12, 2.17, 2.20, 2.22, 2.27, 2.30, 2.33, 2.35, 3.13, 3.15, 3.18, 3.22, 3.28, 3.29, 4.8, 4.14.

Правильный ответ № 3 в вопросах №: 1.1, 1.4, 1.6, 1.9, 1.18, 1.30, 1.33, 1.37, 1.39, 1.40, 1.44, 1.45, 1.46, 1.48, 1.51, 1.60, 1.67, 1.68, 1.79, 2.2, 2.7, 2.15, 2.18, 2.23, 2.28, 2.29, 3.2, 3.4, 3.7, 3.8, 3.10, 3.12, 3.26, 4.2, 4.3, 4.5, 4.10.

Правильный ответ № 4 в вопросах №: 1.3, 1.5, 1.7, 1.12, 1.21, 1.23, 1.25, 1.28, 1.29, 1.32, 1.36, 1.49, 1.64, 1.73, 1.78, 2.5, 2.8, 2.13, 2.14, 2.16, 2.21, 2.25, 2.26, 2.31, 2.34, 2.36, 3.3, 3.6, 3.11, 3.17, 3.19, 3.21, 3.23, 3.25, 3.27, 4.6, 4.9, 4.13.

Правильный ответ № 5 в вопросах №: 1.24, 1.42, 1.62, 1.75, 3.20.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Глава 1

Задачи на комбинаторику

1. $(13!)^4$.
2. $(10 \cdot 9 - 18) \cdot 8! = 2\,903\,040$.
3. $10!/20 = 181\,440$.
4. 60.
5. $n! \cdot k$.
6. 258 — малый приз; 13 545 — поощрительный приз.
7. 2940.
8. 48 048.
9. 230 300 — способов составить караул; 6210 — два Ивановых; 15 180 — один Иванов; 21 575 — хотя бы один Иванов.
10. 945.
11. 10^7 — способов подарить подарки 7 детям; 11 440 — если все подарки одинаковы.
12. 56.
13. 293 930.
14. 24 024.
15. 10^7 — если набор начинается с 0 ($9 \cdot 10^6$ — если нет); 804 800.

Задачи на вычисление вероятности

1. 0,98.
2. $\oplus 0,9$.
3. Второй студент ($p = 0,47$).
4. $\oplus 0,716$.
5. $\oplus 0,31$.
6. 0,83.
7. 0,558.
8. 0,3.
9. 0,219.
10. 0,019.
11. 0,217.
12. 0,698.
13. 0,02.
14. 0,737.
15. 0,03.
16. 0,52.
17. 0,343.
18. 0,897.
19. 0,95.
20. 0,193.
21. $\oplus 0,888$.
22. 0,79.
23. 0,625.
24. 0,875.
25. 0,828.
26. 0,51.
27. 0,317.

Глава 2

$$1. f(x) = \begin{cases} 0, & E \leq 0; \\ 2E, & 0 < E \leq 1; \\ 0, & E > 1. \end{cases}$$

$$2. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0,2; \\ 0,1, & 0,2 < x \leq 0,5; \\ 0,6, & 0,5 < x \leq 0,6; \\ 0,8, & 0,6 < x \leq 0,8; \\ 1,0, & x > 0,8. \end{cases}$$

$$MX = 0,55; DX = 0,0265; \sigma_X = 0,16.$$

$$3. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4; \\ 0,3, & 4 < x \leq 6; \\ 0,5, & 6 < x \leq 8; \\ 0,9, & 8 < x \leq 10; \\ 1,0, & x > 10. \end{cases}$$

$$4. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -6; \\ 0,1, & -6 < x \leq -2; \\ 0,4, & -2 < x \leq 1; \\ 0,8, & 1 < x \leq 4; \\ 1,0, & x > 4. \end{cases}$$

$$MX = 6,6; DX = 4,04; \sigma_X = 2,01. \quad MX = 0; DX = 8,4; \sigma_X = 2,9.$$

$$5. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ 0,2, & 2 < x \leq 5; \\ 0,4, & 5 < x \leq 6; \\ 0,8, & 6 < x \leq 8; \\ 1,0, & x > 8. \end{cases}$$

$$6. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4; \\ 0,3, & 4 < x \leq 6; \\ 0,4, & 6 < x \leq 8; \\ 0,7, & 8 < x \leq 12; \\ 1,0, & x > 12. \end{cases}$$

$$MX = 5,4; DX = 3,84; \sigma_X = 1,96. \quad MX = 7,8; DX = 9,96; \sigma_X = 3,16.$$

$$7. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3; \\ 0,3, & 3 < x \leq 6; \\ 0,5, & 6 < x \leq 7; \\ 0,6, & 7 < x \leq 9; \\ 1,0, & x > 9. \end{cases}$$

$$8. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ 0,1, & -2 < x \leq -1; \\ 0,3, & -1 < x \leq 0; \\ 0,6, & 0 < x \leq 1; \\ 0,9, & 1 < x \leq 2; \\ 1,0, & x > 2. \end{cases}$$

$$MX = 6,4; DX = 6,24; \sigma_X = 2,5.$$

$$MX = 0,1;$$

$$DX = 1,29;$$

$$\sigma_X = 1,14.$$

$$9. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ 0,4, & 1 < x \leq 3; \\ 0,7, & 3 < x \leq 4; \\ 0,8, & 4 < x \leq 5; \\ 1,0, & x > 5. \end{cases}$$

$$MX = 2,7; DX = 2,41; \sigma_X = 1,55.$$

Глава 3

1. $\oplus 0,819$. 2. $\oplus 0,775$. 3. $\oplus 0,75$. 4. $\oplus 0,9994$.

Глава 4

1. $\oplus 0,5$. 2. $\geq 0,84$. 3. ≥ 1225 . 4. $\oplus 0,998$.

Глава 5

1. $F(5, 5) = F_1(5) \cdot F_2(5)$.
 2. $P(0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5) = F(5, 5) - F(0, 5) - F(5, 0) + F(0, 0)$.
 3. $r_{xy} = 1$.

Глава 7

1. $p_0 = \frac{1}{3}; p_1 = \frac{4}{9}; p_2 = \frac{2}{9}$. 2. $Q = 0,2$.
 3. $Q = 0,6$. 4. $Q = 0,25; 4$ канала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — М. : ОНИКС 21 век ; Мир и образование, 2003.
2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата : учебник и практикум / Н. Ш. Кремер. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2014.
4. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : в 2 ч. : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
5. Кузнецов, Б. Т. Математика : учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления / Б. Т. Кузнецов. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2009.
6. Попов, А. М. Высшая математика для экономистов : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2014.
7. Попов, А. М. Линейная алгебра. Высшая математика для экономистов : в 5 кн. Кн. 1 / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : Изд-во ИНЭП, 2013.
8. Попов, А. М. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Высшая математика для экономистов : в 5 кн. Кн. 2 / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : Изд-во ИНЭП, 2014.
9. Попов, А. М. Теория вероятностей и математическая статистика. Высшая математика для экономистов : в 5 кн. Кн. 3 / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : Изд-во ИНЭП, 2014.
10. Попов, А. М. Экономико-математические методы и модели. Высшая математика для экономистов : в 5 кн. Кн. 5 / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : Изд-во ИНЭП, 2014.

11. *Попов, А. М.* Сборник тестов по математике / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : Изд-во ИНЭП, 2013.

12. *Фомин, Г. П.* Математические методы и модели в коммерческой деятельности / Г. П. Фомин. — М. : Финансы и статистика, 2008.

13. Экономико-математические методы и модели / под ред. А. В. Кузнецова. — Минск : БГЭУ, 2014.

Новые издания по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» и смежным дисциплинам

1. *Гмурман, В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для СПО / В. Е. Гмурман. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

2. *Гмурман, В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для СПО / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

3. *Ивашев-Мусатов, О. С.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для СПО / О. С. Ивашев-Мусатов. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

4. *Калинина, В. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для СПО / В. Н. Калинина. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

5. *Кацман, Ю. Я.* Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры с решениями : учебник для СПО / Ю. Я. Кацман. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

6. *Сидняев, Н. И.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для СПО / Н. И. Сидняев. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

7. *Энатская, Н. Ю.* Теория вероятностей : учеб. пособие для СПО / Н. Ю. Энатская. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Краткий справочник по математике

Латинский алфавит

<i>A</i>	<i>a</i>	а	<i>N</i>	<i>n</i>	эн
<i>B</i>	<i>b</i>	бе	<i>O</i>	<i>o</i>	о
<i>C</i>	<i>c</i>	це	<i>P</i>	<i>p</i>	пэ
<i>D</i>	<i>d</i>	де	<i>Q</i>	<i>q</i>	ку
<i>E</i>	<i>e</i>	е	<i>R</i>	<i>r</i>	эр
<i>F</i>	<i>f</i>	эф	<i>S</i>	<i>s</i>	эс
<i>G</i>	<i>g</i>	же	<i>T</i>	<i>t</i>	тэ
<i>H</i>	<i>h</i>	аш	<i>U</i>	<i>u</i>	у
<i>I</i>	<i>i</i>	и	<i>V</i>	<i>v</i>	вэ
<i>J</i>	<i>j</i>	жи	<i>W</i>	<i>w</i>	дубль-вэ
<i>K</i>	<i>k</i>	ка	<i>X</i>	<i>x</i>	икс
<i>L</i>	<i>l</i>	эль	<i>Y</i>	<i>y</i>	игрек
<i>M</i>	<i>m</i>	эм	<i>Z</i>	<i>z</i>	зет

Греческий алфавит

А	α	альфа	Ν	ν	ню
В	β	бета	Ξ	ξ	кси
Г	γ	гамма	Ο	$\omicron$	омикрон
Δ	δ	дельта	Π	π	пи
Ε	ϵ	эпсилон	Ρ	ρ	ро
Ζ	ζ	дзета	Σ	σ	сигма
Η	η	эта	Τ	τ	тау
Θ	θ	тета	Υ	υ	ипсилон
Ι	ι	йота	Φ	ϕ	фи
Κ	κ	каппа	Χ	χ	хи
Λ	λ	лямбда	Ψ	ψ	пси
Μ	μ	мю	Ω	ω	омега

Правила действий с рациональными числами (дробями):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Пропорции

Два равных отношения образуют пропорцию:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad ad = bc.$$

Нахождение членов пропорции:

$$a = \frac{bc}{d}; \quad b = \frac{ad}{c}; \quad c = \frac{ad}{b}; \quad d = \frac{bc}{a}.$$

Пропорции, равносильные пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Производная пропорция — следствие пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ в виде

$$\frac{ma + nb}{pa + qb} = \frac{mc + nd}{pc + qd},$$

где m, n, p, q — произвольные числа, причем p и q не равны нулю одновременно.

Алгебра

Формулы сокращенного умножения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Свойства степени:

$$a^0 = 1; \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (a^m)^n = a^{mn}; \quad (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m; \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}; \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Свойства квадратного (арифметического) корня:
($a, b > 0$; k, m, n — натуральные числа)

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}; \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad (\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}; \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}; \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}; \quad \sqrt{a^m} = (\sqrt{a})^m.$$

Уравнения и системы уравнений

Решение системы двух уравнений первой степени

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a_1x + b_1y = c_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}, \\ y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}. \end{cases}$$

$$(ab_1 - a_1b \neq 0)$$

Формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Формула корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Формула корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Теорема Виета

— для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a};$$

— для приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$:

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Разложение на множители квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Выделение квадрата двучлена из квадратного трехчлена:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Решение биквадратного уравнения $ax^4 + bx^2 + c = 0$:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Формула действительного корня неполного кубического уравнения $y^3 + py + q = 0$:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n - 1) \cdot d}{2} \cdot n;$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_{k+1} + a_{n-k}; \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \dots = b_{k+1} \cdot b_{n-k}; \quad |b_n| = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}.$$

Если $q > 1$, то прогрессия возрастающая; если $0 < q < 1$, то прогрессия убывающая; если $q < 0$, то прогрессия знакопеременная.

Если $0 < |q| < 1$, то $S = \frac{b_1}{1 - q}$ при $n \rightarrow \infty$.

Логарифмы

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$; $\log_e x = \ln x$, где $e \approx 2,72$.

$$b^{\log_b a} = a; \quad \log_a 1 = 0;$$

$$\log_a a = 1; \quad \log_a a^m = m.$$

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b; \log_c \left(\frac{a}{b} \right) = \log_c a - \log_c b;$$

$$\log_c a^k = k \log_c a; \log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a;$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}; \log_a b = \frac{1}{\log_b a};$$

$$\frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b; \log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c;$$

$$a^{\log_n b} = b^{\log_n a}.$$

Теория соединений

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!; n! = n \cdot (n-1)!$$

Формула Стирлинга (факториалы больших чисел):

$$n! \approx \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots \right);$$

$$\ln(n!) \approx \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi}.$$

Комбинаторика

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1);$$

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n; P_n = A_n^n;$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m};$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}, C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Бином Ньютона

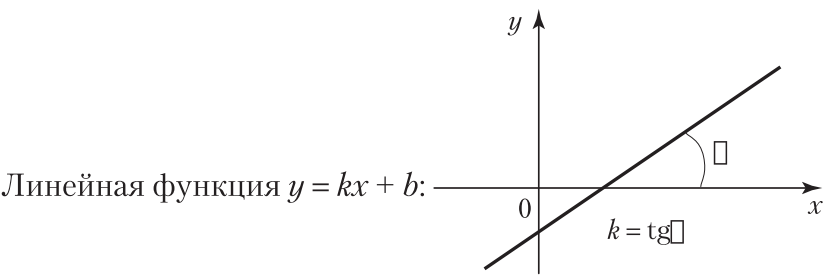
$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n;$$

$$C_n^1 = n; C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}; C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

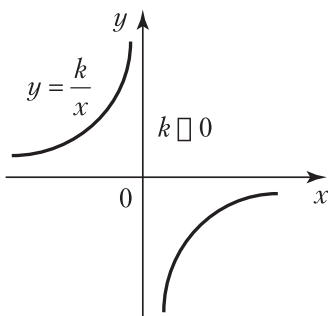
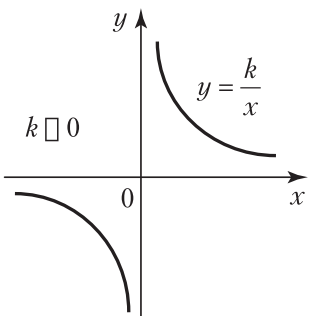
Треугольник Паскаля

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
1		5		10		10		5	1
1	6		15		20		15	6	1
1	7	21		35		35	21	7	1

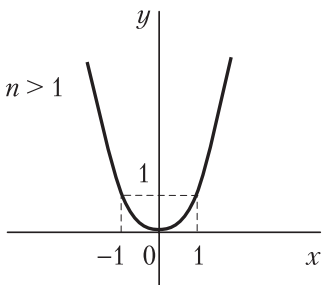
Графики элементарных функций



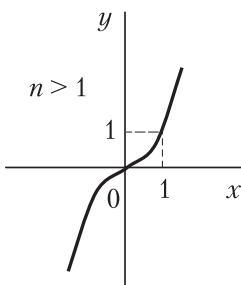
Дробно-линейная функция $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0, x \neq 0$):



Степенная функция $y = x^n$:

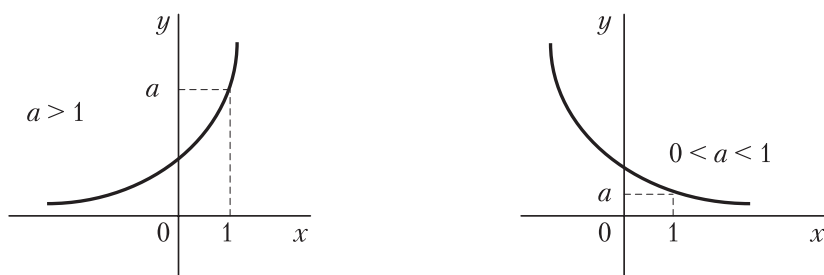


n — четное

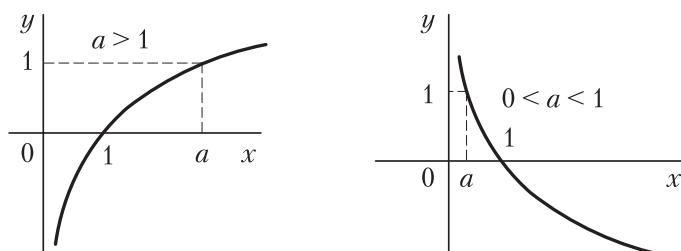


n — нечетное

Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$):

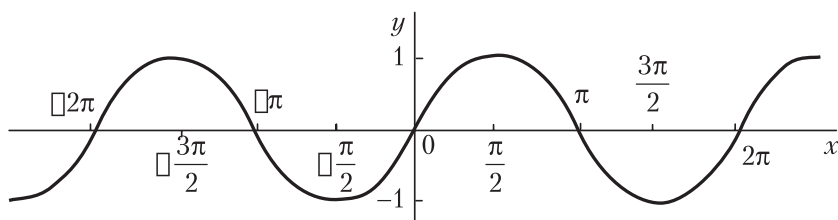


Логарифмическая функция $y = \log_a x$:

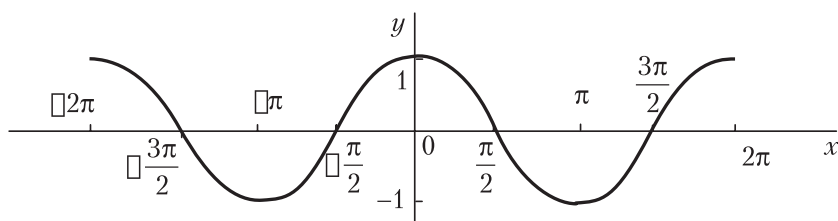


Тригонометрические функции:

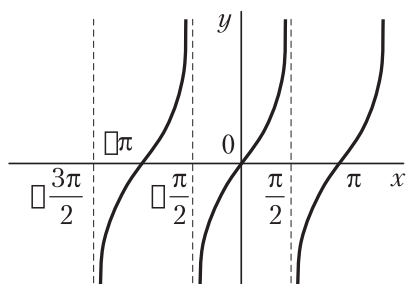
$$y = \sin x$$



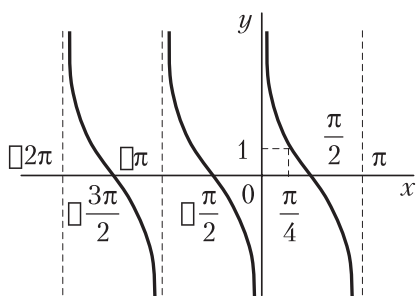
$$y = \cos x$$



$$y = \operatorname{tg} x$$

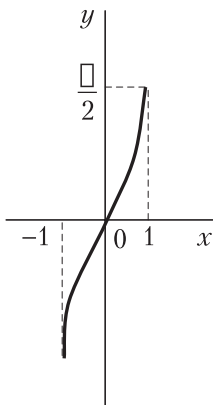


$$y = \operatorname{ctg} x$$

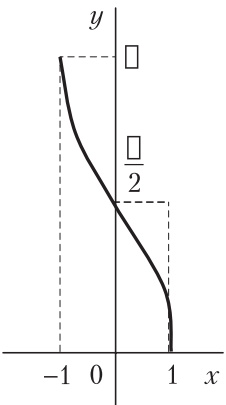


Обратные тригонометрические функции:

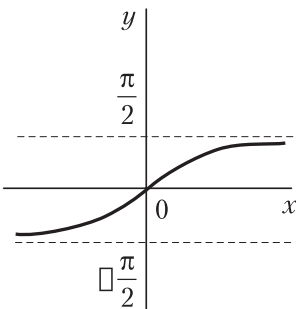
$y = \arcsin x$



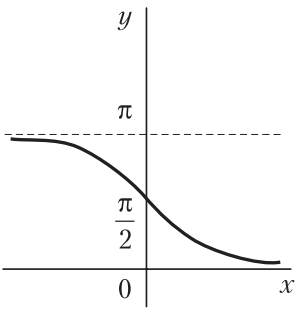
$y = \arccos x$



$y = \arctg x$



$y = \text{arcctg } x$



Тригонометрия

Градусная и радианная меры углов

$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$

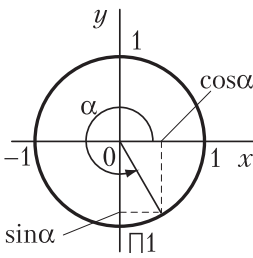
0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Тригонометрические функции:

Синус угла α — ордината точки единичной окружности, соответствующей данному углу, т.е. $\sin \alpha = y$.

Косинус угла α — абсцисса точки окружности, соответствующей данному углу, т.е. $\cos \alpha = x$.

$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$



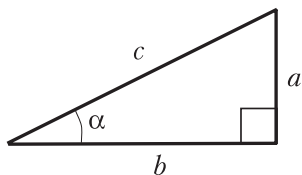
Знаки значений тригонометрических функций:

Четверть	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

Значения тригонометрических функций некоторых углов:

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	–1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	–1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$^\circ$	$-\sqrt{3}$	0	$^\circ$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$^\circ$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$^\circ$	0	$^\circ$

Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c};$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Тригонометрические тождества:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha};$$

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Формулы сложения тригонометрических функций:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \\ \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}.\end{aligned}$$

Тригонометрические функции двойного угла:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha; \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}.\end{aligned}$$

Тригонометрические функции половинного угла:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.\end{aligned}$$

Сумма и разность тригонометрических функций:

$$\begin{aligned}\sin \alpha \pm \sin \beta &= 2\sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}; \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.\end{aligned}$$

Понижение степени тригонометрических функций:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Произведение тригонометрических функций:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2};$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2};$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

Соотношение между обратными тригонометрическими функциями:

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\operatorname{arctg} x = \pi - \operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Геометрия

Треугольники

Формула вычисления площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}bc \sin \alpha.$$

Теорема косинусов:

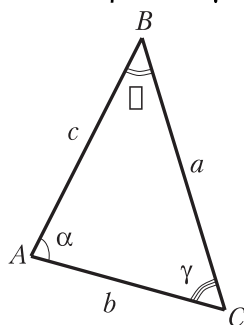
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$



Четырехугольники

Параллелограмм:

$$S = abs \sin \alpha.$$

Прямоугольник:

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

Ромб:

$$S = ah = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

Квадрат:

$$S = a^2 = \frac{1}{2} d^2.$$

Трапеция:

$$S = \frac{a+b}{2} h = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi;$$

$$MN = \frac{1}{2}(a+b) - \text{средняя линия.}$$

Окружность и круг

Длина окружности:

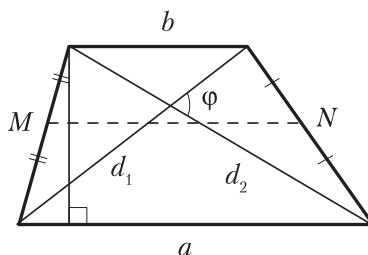
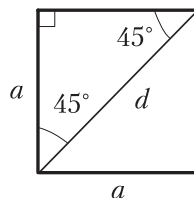
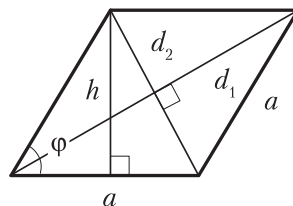
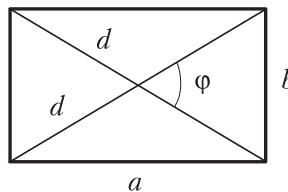
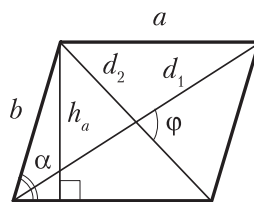
$$C = 2\pi r = \pi d.$$

Длина дуги, равной n° :

$$L = \frac{\pi r}{180^\circ} n^\circ.$$

Площадь круга:

$$S = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4} = \frac{Cd}{4}.$$



Сегмент и сектор:

$$a = 2R \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}.$$

Площадь сектора:

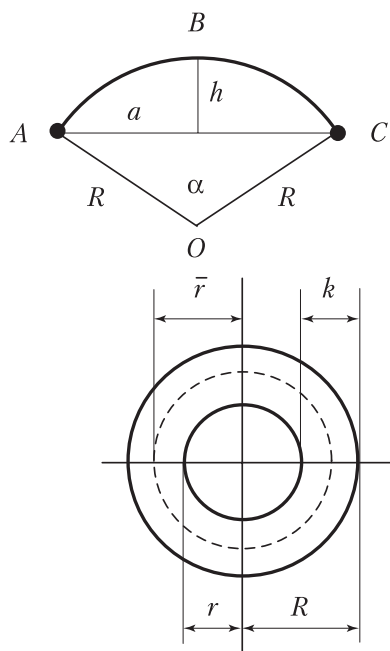
$$S_{OABC} = \frac{1}{2} R^2 \alpha.$$

Площадь сегмента:

$$S_{ABC} = S_{OABC} - S_{OAC}.$$

Площадь кругового кольца:

$$a = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi \bar{r}k.$$



Основные формулы математического анализа

Производная и дифференциал

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Правила нахождения производной:

$$c' = 0;$$

$$(u - v)' = u' - v';$$

$$(cu)' = cu';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$(u + v)' = u' + v';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Производные элементарных функций:

$$c' = 0;$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad x' = 1;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}; \\
 (\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}; \\
 (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \\
 (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \\
 (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}; \\
 (\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

Определение и свойства пределов

Свойства пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x) - h(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) - \lim_{x \rightarrow a} h(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \right).$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2,71828... .$$

Правило Лопиталья для неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если предел в правой части существует.

Неопределенный интеграл

Основные свойства неопределенного интеграла:

$$d \int f(x) dx = f(x) dx;$$

$$\left[\int f(x) dx \right]' = f(x);$$

$$\int dF(x) = F(x) + C;$$

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, k \neq 0;$$

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx.$$

Основные методы интегрирования

Метод разложения:

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx,$$

где $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Метод подстановки: если $x = \varphi(t)$, то

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Метод интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Табличные интегралы некоторых функций:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1); \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \quad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1;$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C; \quad \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C.$$

Определенный интеграл

Формула Ньютона — Лейбница:

если $f(x)$ непрерывна и $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Основные свойства определенного интеграла:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f(t)dt; \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \\ \int_a^a f(x)dx &= 0; \quad \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx; \\ \int_a^b kf(x)dx &= k \int_a^b f(x)dx; \\ \int_a^b [f(x) + g(x) - h(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx; \\ \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt &= f(x); \quad \frac{d}{dx} \int_x^b f(t)dt = -f(x).\end{aligned}$$

Теорема о среднем:

если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c),$$

где $a < c < b$.

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$.

Формула трапеций:

$$\int_a^b ydx \approx h \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n \right),$$

где $h = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ и $x_n = b$, $y = f(x)$, $y_i = f(x_0 + ih)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Формула Симпсона:

$$\int_a^b ydx \approx \frac{h}{3} \left[y(a) + 4y\left(\frac{a+b}{2}\right) + y(b) \right],$$

где $h = \frac{1}{2}(b-a)$.

Несобственный интеграл:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения второго порядка

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad y = \bar{y} + z,$$

где $\bar{y}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, z — частное решение данного неоднородного уравнения.

Общий вид решений однородного уравнения:

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (p \text{ и } q \text{ постоянны})$$

в зависимости от корней характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$:

Характер корней k_1 и k_2 характеристического уравнения	Вид общего решения
Корни k_1 и k_2 действительные и различные	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
Корни равные: $k_1 = k_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}$
Корни комплексные: $k_1 = \alpha + i\beta$ $k_2 = \alpha - i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Характер частного решения z неоднородного уравнения:

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p \text{ и } q \text{ постоянны})$$

в зависимости от правой части $f(x)$:

Правая часть $f(x)$	Случаи	Частное решение
$f(x) = ae^{mx}$ (a, m — постоянны)	1) $m^2 + pm + q \neq 0$; 2) $m^2 + pm + q = 0$; а) $p^2 - 4q > 0$; б) $p^2 - 4q = 0$	$z = Ae^{mx}$; $z = Axe^{mx}$; $z = Ax^2 e^{mx}$
$f(x) = M \cos \omega x + N \sin \omega x$ (M, N, ω — постоянны; $\omega \neq 0$)	1) $p^2 + (q - \omega^2)^2 \neq 0$; 2) $p = 0, \quad q = \omega^2$	$z = A \cos \omega x + B \sin \omega x$; $z = x(A \cos \omega x + B \sin \omega x)$

Окончание таблицы

Правая часть $f(x)$	Случаи	Частное решение
$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c — постоянны)	1) $q \uparrow 0$; 2) $q = 0, \quad p \neq 0$	$z = Ax^2 + Bx + C$; $z = x(Ax^2 + Bx + C)$

Дифференциальное исчисление функций двух переменных

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ от независимых переменных x и y :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

где $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Градиент скалярного поля $u = f(x, y, z)$ есть вектор:

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$$

Модуль градиента:

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Ряды

Числовые ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_n.$$

Необходимый признак сходимости ряда: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Признак Даламбера: пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0$) существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Если $l < 1$, то ряд сходится.

Если $l > 1$, то ряд расходится.

Признак Лейбница: если $v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \dots \geq 0$ и $v_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то знакопередающий ряд

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \dots$$

сходится.

Радиус сходимости степенного ряда

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

определяется по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}},$$

если последняя имеет смысл.

Степенные ряды

Ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n].$$

Ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Разложение в степенные ряды основных функций:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, (|x| < 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, (-1 < x \leq 1);$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, (|x| < +\infty);$$

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}x^3 + \dots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots; \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Основные формулы линейной алгебры

Матрицы и определители

Единичная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица (A^{-1}):

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E;$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

где Δ — определитель матрицы A ; A_{ij} — алгебраическое дополнение ее элемента a_{ij} .

Определители

Определитель второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Формулы Крамера для системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Определитель третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

где $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя.

Формулы Крамера для системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

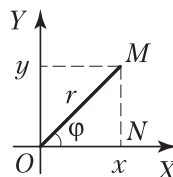
$$\text{где } \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Комплексные числа

Вид комплексного числа:

$$z = x + iy,$$

где x, y — действительные числа; i — мнимая единица; $i^2 = -1$.



Модуль комплексного числа:

$$|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$$x + yi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Действия с комплексными числами:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).$$

Корень из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Показательная форма записи комплексных чисел:

$$z = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

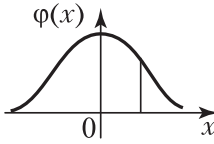
Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Приложение 2. Значения функции Гаусса

Значения функции Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$



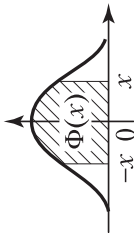
Целые и десятые доли x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736

Приложение 2 (продолжение)

Целые и десятые доли x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081

Приложение 3. Значения функции Лапласа

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$



Целые и десятые доли x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2585	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2960	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6679	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7053	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660

Приложение 3 (продолжение)

Целые и десятые доли x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7984	0,8029
1,3	0,8054	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9327	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9392	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9533
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	0,9543	0,9651	0,9660	0,9668	0,9576	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9743	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9841	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	0,9907	0,9910	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9928

Приложение 4 (продолжение)

$\lambda \backslash m$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521

Приложение 5. Равномерно распределенные случайные числа

0,10	0,09	0,73	0,25	0,33	0,66	0,06	0,57	0,47	0,17	0,34	0,07	0,27	0,68	0,50	0,80	0,15	0,73	0,61	0,47
0,37	0,54	0,20	0,48	0,05	0,31	0,06	0,01	0,08	0,05	0,45	0,57	0,18	0,24	0,06	0,35	0,30	0,34	0,26	0,14
0,08	0,42	0,26	0,89	0,53	0,85	0,26	0,97	0,76	0,02	0,02	0,05	0,16	0,56	0,92	0,68	0,66	0,57	0,48	0,18
0,99	0,01	0,90	0,25	0,29	0,63	0,57	0,33	0,21	0,35	0,05	0,32	0,54	0,70	0,48	0,90	0,55	0,35	0,75	0,48
0,12	0,80	0,79	0,99	0,70	0,73	0,79	0,64	0,57	0,53	0,03	0,52	0,96	0,47	0,78	0,35	0,80	0,83	0,42	0,82
0,65	0,81	0,33	0,98	0,85	0,98	0,52	0,01	0,77	0,67	0,14	0,90	0,56	0,86	0,07	0,22	0,10	0,94	0,05	0,58
0,86	0,79	0,90	0,74	0,39	0,11	0,80	0,50	0,54	0,31	0,39	0,80	0,82	0,77	0,32	0,50	0,72	0,56	0,82	0,48
0,73	0,05	0,38	0,52	0,47	0,83	0,45	0,29	0,96	0,34	0,06	0,28	0,89	0,80	0,83	0,13	0,74	0,67	0,00	0,78
0,28	0,46	0,82	0,87	0,09	0,88	0,68	0,54	0,02	0,00	0,86	0,50	0,75	0,84	0,01	0,36	0,76	0,66	0,79	0,51
0,60	0,93	0,52	0,03	0,44	0,99	0,59	0,46	0,73	0,48	0,87	0,51	0,76	0,49	0,69	0,91	0,82	0,60	0,89	0,28
0,60	0,97	0,09	0,34	0,33	0,65	0,48	0,11	0,76	0,74	0,17	0,46	0,85	0,09	0,50	0,58	0,04	0,77	0,69	0,74
0,29	0,40	0,52	0,42	0,01	0,80	0,12	0,43	0,56	0,35	0,17	0,72	0,70	0,80	0,15	0,45	0,31	0,82	0,23	0,74
0,18	0,47	0,54	0,06	0,10	0,74	0,35	0,09	0,98	0,17	0,77	0,40	0,27	0,72	0,14	0,43	0,23	0,60	0,02	0,10
0,90	0,36	0,47	0,64	0,93	0,69	0,91	0,62	0,68	0,03	0,66	0,25	0,22	0,91	0,48	0,36	0,93	0,68	0,72	0,03
0,93	0,78	0,56	0,13	0,68	0,09	0,89	0,32	0,05	0,05	0,14	0,22	0,56	0,85	0,14	0,46	0,42	0,75	0,67	0,88
0,73	0,03	0,95	0,71	0,86	0,91	0,49	0,91	0,45	0,23	0,68	0,47	0,92	0,76	0,86	0,46	0,16	0,28	0,35	0,54
0,21	0,11	0,57	0,82	0,53	0,80	0,33	0,69	0,45	0,98	0,26	0,94	0,03	0,68	0,58	0,70	0,29	0,73	0,41	0,35

Приложение 5 (продолжение)

0,45	0,52	0,16	0,42	0,37	0,44	0,10	0,48	0,19	0,49	0,85	0,15	0,74	0,79	0,54	0,32	0,97	0,92	0,65	0,75
0,76	0,62	0,11	0,39	0,90	0,12	0,55	0,07	0,37	0,42	0,11	0,10	0,00	0,20	0,40	0,12	0,86	0,07	0,46	0,97
0,96	0,29	0,77	0,88	0,22	0,63	0,60	0,64	0,93	0,29	0,16	0,50	0,53	0,44	0,84	0,40	0,21	0,95	0,25	0,63
0,94	0,75	0,08	0,99	0,23	0,61	0,19	0,69	0,04	0,46	0,26	0,45	0,74	0,77	0,74	0,51	0,92	0,43	0,37	0,29
0,53	0,14	0,03	0,33	0,40	0,15	0,47	0,44	0,52	0,66	0,95	0,27	0,07	0,99	0,53	0,59	0,36	0,78	0,38	0,48
0,57	0,60	0,04	0,08	0,81	0,94	0,55	0,72	0,85	0,73	0,67	0,89	0,75	0,43	0,87	0,54	0,62	0,24	0,44	0,31
0,96	0,64	0,48	0,94	0,39	0,42	0,48	0,11	0,62	0,13	0,97	0,34	0,40	0,87	0,21	0,16	0,86	0,84	0,87	0,67
0,43	0,65	0,17	0,70	0,82	0,23	0,52	0,37	0,83	0,17	0,73	0,20	0,88	0,98	0,37	0,68	0,93	0,59	0,14	0,16
0,65	0,39	0,45	0,95	0,93	0,04	0,49	0,35	0,24	0,94	0,75	0,24	0,63	0,38	0,24	0,45	0,86	0,25	0,10	0,25
0,82	0,39	0,61	0,01	0,18	0,00	0,54	0,99	0,76	0,54	0,64	0,05	0,18	0,81	0,59	0,96	0,11	0,96	0,38	0,96
0,91	0,19	0,04	0,25	0,92	0,35	0,96	0,31	0,53	0,07	0,26	0,89	0,80	0,93	0,54	0,33	0,35	0,13	0,54	0,62
0,03	0,07	0,11	0,20	0,59	0,59	0,80	0,80	0,83	0,91	0,45	0,42	0,72	0,68	0,42	0,83	0,60	0,94	0,97	0,00
0,26	0,25	0,22	0,96	0,63	0,46	0,05	0,88	0,52	0,36	0,01	0,39	0,09	0,22	0,86	0,77	0,28	0,14	0,40	0,77
0,61	0,96	0,27	0,93	0,35	0,32	0,17	0,90	0,05	0,97	0,87	0,37	0,92	0,52	0,41	0,05	0,56	0,70	0,70	0,07
0,54	0,69	0,28	0,23	0,91	0,69	0,23	0,46	0,14	0,06	0,20	0,11	0,74	0,52	0,04	0,15	0,95	0,66	0,00	0,00
0,77	0,97	0,45	0,00	0,24	0,19	0,56	0,54	0,14	0,30	0,01	0,75	0,87	0,53	0,79	0,40	0,41	0,92	0,15	0,85
0,13	0,02	0,12	0,48	0,92	0,45	0,15	0,51	0,49	0,38	0,19	0,47	0,60	0,72	0,46	0,43	0,66	0,79	0,45	0,43
0,93	0,91	0,08	0,36	0,47	0,94	0,86	0,43	0,19	0,94	0,36	0,16	0,81	0,08	0,51	0,34	0,88	0,88	0,15	0,53

Приложение 5 (окончание)

0,86	0,74	0,31	0,71	0,57	0,98	0,08	0,62	0,48	0,26	0,45	0,24	0,02	0,84	0,04	0,44	0,99	0,90	0,88	0,96
0,18	0,74	0,39	0,24	0,23	0,33	0,18	0,51	0,62	0,32	0,41	0,94	0,15	0,09	0,49	0,89	0,43	0,54	0,85	0,81
0,66	0,67	0,43	0,68	0,06	0,80	0,95	0,10	0,04	0,06	0,96	0,38	0,27	0,07	0,74	0,20	0,15	0,12	0,33	0,87
0,59	0,04	0,79	0,00	0,33	0,79	0,75	0,24	0,91	0,40	0,71	0,96	0,12	0,82	0,96	0,69	0,86	0,10	0,25	0,91
0,01	0,54	0,03	0,54	0,56	0,18	0,63	0,33	0,25	0,37	0,98	0,14	0,50	0,65	0,71	0,31	0,01	0,02	0,46	0,74
0,39	0,09	0,47	0,34	0,07	0,74	0,02	0,94	0,39	0,02	0,77	0,55	0,73	0,22	0,70	0,97	0,79	0,01	0,71	0,19
0,88	0,69	0,54	0,19	0,94	0,54	0,17	0,84	0,56	0,11	0,80	0,99	0,33	0,71	0,43	0,05	0,33	0,51	0,29	0,69
0,25	0,01	0,62	0,52	0,98	0,11	0,66	0,44	0,98	0,83	0,52	0,07	0,98	0,48	0,27	0,59	0,38	0,17	0,15	0,39
0,74	0,85	0,22	0,05	0,39	0,48	0,32	0,47	0,79	0,28	0,31	0,24	0,96	0,47	0,10	0,02	0,29	0,53	0,68	0,70
0,05	0,45	0,56	0,14	0,27	0,69	0,07	0,49	0,41	0,38	0,87	0,63	0,79	0,19	0,76	0,35	0,58	0,40	0,44	0,01
0,52	0,52	0,75	0,80	0,21	0,34	0,67	0,35	0,48	0,76	0,80	0,95	0,90	0,91	0,17					
0,56	0,12	0,71	0,92	0,55	0,24	0,80	0,52	0,40	0,37	0,20	0,63	0,61	0,04	0,02					
0,09	0,97	0,33	0,34	0,40	0,23	0,20	0,90	0,25	0,60	0,15	0,95	0,33	0,47	0,64					
0,32	0,30	0,75	0,75	0,46	0,38	0,31	0,13	0,11	0,65	0,88	0,67	0,67	0,43	0,97					
0,10	0,51	0,82	0,16	0,15	0,64	0,03	0,23	0,66	0,53	0,98	0,95	0,11	0,68	0,77					

Наши книги можно приобрести:

Учебным заведениям и библиотекам:

в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

Частным лицам:

список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

Магазинам и корпоративным клиентам:

в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

Отзывы об издании присылайте в редакцию

e-mail: red@urait.ru

**Новые издания и дополнительные материалы доступны
в электронной библиотечной системе «Юрайт»
biblio-online.ru**

Учебное издание

**Попов Александр Михайлович,
Сотников Валерий Николаевич**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие для СПО

Формат 60×90^{1/16}.

Гарнитура «Petersburg». Печать цифровая.

Усл. печ. л. 13,44.

ООО «Издательство Юрайт»

111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.

Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru